Stochastik - Musterlösung
(BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

1. (10 Punkte)

a) 3 b) 2 c) 3 d) 1 e) 3 f) 2 g) 1 h) 3 i) 3 j) 2

2. (10 Punkte) Beachte, dass $T_i - 1 \sim \text{Exp}(3)$.

a) $E[T_i] = 1 + 1/\lambda = 4/3$.

b) $\text{var}(T_i) = 1/\lambda^2 = 1/9$.

c) $P(T > 7/6) = P(T - 1 > 1/6) = e^{-\lambda/6} = e^{-1/2} = 60.7\%$.

d) Aus $S = \sum T_i$ folgt $E[S] = 81 \cdot 13/9 = 117$ und $\text{var}(S) = 81 \cdot 1/9 = 9$. Somit gilt mit dem ZGS

$$\frac{S - 117}{3} = 2,$$

und damit $S = 123$ Minuten oder 2 Stunden und 3 Minuten.

3. (10 Punkte)

a) Es gilt mit dem Satz von Bayes

$$\begin{aligned} P[F = G|R_1 < R_2 < R_3] \\ &= \frac{P[R_1 < R_2 < R_3|F = G]P[F = G]}{P[R_1 < R_2 < R_3|F = G]P[F = G] + P[R_1 < R_2 < R_3|F = B]P[F = B]} \\ &= \frac{0.6 \cdot 0.25}{0.6 \cdot 0.25 + 0.1 \cdot 0.75} = \frac{2}{3} \approx 0.67 \end{aligned}$$

und

$$P[F = B|R_1 < R_2 < R_3] = 1 - P[F = G|R_1 < R_2 < R_3] = \frac{1}{3} \approx 0.33,$$

also

$$P[F = G|R_1 < R_2 < R_3] > P[F = B|R_1 < R_2 < R_3].$$

Wenn Messungen $R_1 < R_2 < R_3$ ergeben klassifizieren wir den Fels also als Granit.

Bitte wenden!

b) Es gilt

$$P[F \text{ falsch klassifiziert}] = P[F \text{ falsch klassifiziert}, F = G] + P[F \text{ falsch klassifiziert}, F = B].$$

Gemäss der Klassifizierungstabelle gilt

$$\begin{aligned}
&P[F \text{ falsch klassifiziert}, F = G] \\
&\quad = P[F = G, R_1 < R_3 < R_2] + P[F = G, R_3 < R_1 < R_2] \\
&\quad = P[R_1 < R_3 < R_2 | F = G] P[F = G] + P[R_3 < R_1 < R_2 | F = G] P[F = G] \\
&\quad = 0.25 \cdot 0.25 + 0.15 \cdot 0.25 = 0.10
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
P[F \text{ falsch klassifiziert}, F = B] &= P[F = B, R_1 < R_2 < R_3] \\
&= P[R_1 < R_2 < R_3 | F = B] P[F = B] \\
&= 0.1 \cdot 0.75 = 0.075,
\end{aligned}$$

also $P[F \text{ falsch klassifiziert}] = 0.175$.

c) Wir erhalten

$$\begin{aligned}
P_{G|123} &= \frac{P_{123|G} \cdot p}{P_{123|G} \cdot p + P_{123|B} \cdot (1-p)} = \frac{0.6p}{0.5p + 0.1} > 0.5, \\
P_{G|132} &= \frac{P_{132|G} \cdot p}{P_{132|G} \cdot p + P_{132|B} \cdot (1-p)} = \frac{0.25p}{0.05p + 0.2} > 0.5, \\
P_{G|312} &= \frac{P_{312|G} \cdot p}{P_{312|G} \cdot p + P_{312|B} \cdot (1-p)} = \frac{0.15p}{0.7 - 0.55p} > 0.5.
\end{aligned}$$

Auflösen nach p ergibt

$$\begin{aligned}
p &> \frac{0.1 \cdot 0.5}{0.6 - 0.5 \cdot 0.5} = 1/7 \approx 0.143, \\
p &> \frac{0.2 \cdot 0.5}{0.25 - 0.05 \cdot 0.5} = 4/9 \approx 0.444, \\
p &> \frac{0.7 \cdot 0.5}{0.15 + 0.55 \cdot 0.5} = 14/17 \approx 0.824,
\end{aligned}$$

also für $p \in (14/17, 1]$ wird jeder Fels als Granit klassifiziert.

4. (10 Punkte)

a) (**7P**) Mittels eines Binomial-Tests möchten wir testen ob sich die Anteile der unter Nebenbeschwerden leidenden Patienten bei der Einnahme von Tabletten und Pulver signifikant unterscheiden.
Laut Aufgabenstellung ist die Anzahl Patienten, welche frei sind von Nebenbeschwerden, gegeben durch $X \sim Bin(50, p)$. Dabei bezeichnet der Erfolgsparameter p die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person keine Nebenbeschwerden hat bei der Einnahme des neuen Medikaments. Wir gehen dabei nun wir folgt vor:

Siehe nächstes Blatt!

i) H_0: Die Tabletten bringen keine signifikante Veränderung bzgl. Nebenwirkungen mit sich, d.h. es hat gleichviele Patienten welche frei sind von Nebenbeschwerden wie bei der Einnahme des Pulvers, also $X \sim Bin(50, p)$ mit $p = 0.6$.
H_A: Das neue Medikament bringt eine signifikante Veränderung bzgl. Nebenwirkungen mit sich, d.h. es hat signifikant mehr oder signifikant weniger Patienten welche frei sind von Nebenbeschwerden, also $X \sim Bin(50, p)$ mit $p \neq 0.6$.
(1P für H_0 und 1P für H_A)

ii) Der Test ist zweiseitig durchzuführen. Wir möchten herausfinden ob eine signifikante *Veränderung* vorliegt. Es ist nicht wichtig ob es signifikant mehr oder signifikant weniger Patienten sind. (**1P**)

iii) Unter H_0 ist $X \sim Bin(n = 50, p = 0.6)$. Da wir zweiseitig testen, verwerfen wir H_0, falls extrem viel mehr *oder* extrem viel weniger Patienten under Beschwerden leiden, d.h. der Verwerfungsbereich hat die Form $V = V_1 \cup V_2$, wobei $V_1 = \{k \in \mathbb{N}_0 : k \leq k1\}$ und $V_2 = \{k \in \mathbb{N}_0 : k \geq k2\}$ für noch zu bestimmende $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$.
Für einen Test auf dem Niveau $\alpha = 5\%$ soll also gelten $P_{H_0}(X \in V) \leq 0.05$. Da zweiseitig gestestet wird, haben wir $P_{H_0}(X \in V) = P_{H_0}(\{X \in V1\} \cup \{X \in V_2\}) = P_{H_0}(X \in V_1) + P_{H_0}(X \in V_2)$ und somit muss gelten $P_{H_0}(X \in V_i) \leq 0.05/2 = 0.025$ für $i = 1, 2$ (**1P**).

V_1: Gesucht ist k_1 so, dass $P_{H_0}(X \in V_1) = P_{H_0}(X \leq k_1) \leq 2.5\%$. Durch Ablesen aus der Binomialtabelle erhalten wir $P_{H_0}(X \leq 23) = 0.0314$ $P_{p=0.6}(X \leq 22) = 0.0160$ und somit also $k_1 = 22$ (**1P**).

V_2 Analog, suchen wir k_2 so, dass $P_{H_0}(X \in V_2) = P_{H_0}(X \geq k_2) \leq 2.5\%$. Mittels Tabelle findet man $P_{H_0}(X \geq k_2 = 37) = 1 - P_{H_0}(X \leq 36) = 1 - 0.9720 = 0.0280$ und $P_{H_0}(X \geq k_2 = 38) = 1 - P_{H_0}(X \leq 37) = 1 - 0.9867 = 0.0133$ und somit $k_2 = 38$ (**1P**).

Der Verwerfungsbereich ist somit gegeben durch $V = \{\dots 20, 21, 22\} \cup \{38, 39, 40, \dots\}$.

iv) Testentscheidung: Von den ausgewählten 50 Patienten hatten bei der Einnahme des neuen Medikaments 35 über Nebenwirkungen geklagt. Somit verwerfen wir H_0 nicht, denn $35 \notin V$. (**1P**)

b) (**3P**) Gesucht ist der Fehler 2. Art des Binomial-Tests aus a) für die Alternativhypothese $H_A : X \sim Bin(50, 1 - 0.2 = 0.8)$ (**1P**). Der Fehler 2. Art ist die Wahrscheinlichkeit H_0 nicht zu verwerfen unter der Annahme dass H_A korrekt ist, d.h. $P(\text{Fehler 2. Art}) = P_{H_A}(X \notin V)$. (**1P** def. Fehler 2. Art)

Laut Binomial-Tabelle (für $p = 0.8$) gilt mit dem korrekten Verwerfungsbereich aus a) $V = \{\dots, 21, 22\} \cup \{38, 39, 40, \dots\}$ also

$$P_{H_A}(X \notin V) \quad = \quad P_{H_A}(23 \leq X \leq 37) = \underbrace{P_{H_A}(X \leq 37)}_{= 0.186} - \underbrace{P_{H_A}(X \leq 22)}_{= 0} = 0.186.$$

(**1P**)

Im Falle des in der Aufgabe angegebenen Verwerfungsbereichs $V = \{k \in \mathbb{N} : k \geq 34\}$ erhält man analog $P_{H_A}(X \notin V) = P_{H_A}(X \ngeq 34) = P_{H_A}(X \leq 33) = 0.0144$.

Bitte wenden!

Bemerkung: Es kann auch eine *Normalapproximation* verwendet werden!!! In diesem Fall erhält man die folgende Lösung:

a) i): $H_0 : X \sim N(\mu, \sigma)$ mit $\mu = np = 50 \cdot 0.6 = 30$ und $H_A : \mu \neq 30$.
ii) Zweiseitig. klar.
iii) Für einen Test auf dem Niveau $\alpha = 5\%$ soll also gelten $P_{H_0}(X \in V) \leq 0.05$. Da zweiseitig gestestet wird, muss gelten $P_{H_0}(X \leq k_1) \leq 0.05/2 = 0.025$ und $P_{H_0}(X \geq k_2) \leq 0.05/2 = 0.025$ für noch zu findende Werte k_1 und k_2. Mittels Normalapproximation erhalten wir:

$$P_{H_0}(X \leq k_1) = P_{H_0}(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{k_1-\mu}{\sigma}) \approx \Phi(\frac{k_1-\mu}{\sigma})$$

und somit gilt mit Hilfe der NV-Tabelle

$$\frac{k_1-\mu}{\sigma} \leq \Phi^{-1}(0.025) \approx -1.96 \Rightarrow k_1 \leq 30 - \sqrt{12}1.96 \approx 23.21$$

Analog gilt für k_2:

$$\frac{k_2-\mu}{\sigma} \geq \Phi^{-1}(0.975) \approx 1.96 \Rightarrow k_1 \leq 30 + \sqrt{12}1.96 \approx 36.79$$

Damit ist der Verwerfungsbereich V gegeben druch $V = \{x \in \mathbb{R} : x \leq k_1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq k_2\}$.

Analog können wir auch den Verwerfungsbereich für p anstatt X angeben: Verwerfungsbereich = ausserhalb des Vertrauensintervalls:

$$VI = \frac{x}{n} \pm \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\sqrt{\frac{x}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)\frac{1}{n}} = \begin{cases} [0.57, 0.82], \text{falls} H_0 : p = 0.6, \\ [0.26, 0.53], \text{falls} H_0 : p = 0.4, \end{cases}$$

iv) Testentscheidung: $35 \notin V$ (resp. $0.7 \notin [-\infty, 0.57] \cup [0.82, \infty]$ oder $0.4 \notin [-\infty, 0.26] \cup [0.53, \infty]$. Die Nullhypothese wird also nicht verworfen.

b) Fehler 2.Art: $H_A : X \sim N(\mu, \sigma)$ mit $\mu_A = np = 50 \cdot 0.8 = 40$ Damit gilt

$$\begin{aligned}
P(\text{Fehler 2. Art}) &= P_{H_A}(X \notin V) = P_{H_A}(k1 \leq X \leq k_2) \\
&= P_{H_A}(X \leq k_2) - P_{H_A}(X \leq k_1) \\
&= P_{H_A}(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{k_2-\mu}{\sigma}) - P_{H_A}(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{k_1-\mu}{\sigma}) \\
&\approx \Phi(\frac{k_2-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{k_1-\mu}{\sigma}) \\
&\approx \Phi(\frac{36.79-40}{\sqrt{8}}) - \Phi(\frac{23.21-40}{\sqrt{8}}) \\
&\approx 1 - \Phi(1.135) - (1 - \Phi(5.936)) \\
&\approx 1 - 0.8719 \approx 0.1281.
\end{aligned}$$