Stochastik - Musterlösung
(BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

1. **a)** 2.

b) 3.

c) 2.

d) 2.
$\mathbb{P}(A|U5) = \frac{\mathbb{P}(U5|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(U5|A)\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(U5|B)\mathbb{P}(B)} = \frac{0.85\cdot 0.5}{0.85\cdot 0.5+0.8\cdot 0.5} = 0.5152.$

e) 2.
1. fällt aus da eine negative Zahl niemals Realisierung einer Uni $[0,1]$-Verteilung sein kann. 3. fällt aus da alle Zahlen > 0.5 sind und die entsprechenden Realisierungen der Standardnormalverteilung daher alle > 0 sein müssten. Mit R nachgerechnet erhält man

```
> rnorm(3, 0, 1)
[1]  1.7460353  0.6588217 -0.2870716
> pnorm(1.7460353, 0, 1)
[1] 0.9595976
> pnorm(0.6588217, 0, 1)
[1] 0.7449949
> pnorm(-0.2870716, 0, 1)
[1] 0.3870287
```

f) 1.

g) 3.

h) 1.

i) 1.

j) 2.

```
> pbinom(2, 8, 0.5)
[1] 0.1445313
```

Und der Verwerfungsbereich ist nicht die leere Menge:

```
> pbinom(1, 8, 0.5)
[1] 0.03515625
```

Bitte wenden!

2. Sei $D :=$"Annas Chip ist defekt", $M :=$"Annas Chip wurde an einem Montag produziert". In einer Woche werden $5 \cdot 200 = 1000$ Chips produziert. Aus der Aufgabenstellung folgt also $P[M] = \frac{200}{1000} = \frac{1}{5}$ $(= 0{,}2)$, $P[M^c] = 1 - P[M] = \frac{4}{5}$ $(= 0{,}8)$. Weiter haben wir $P[D \mid M] = \frac{1}{5}$ $(= 0{,}2)$ und $P[D^c \mid M^c] = \frac{9}{10}$ $(= 0{,}9)$. Daraus folgt ausserdem $P[D^c \mid M] = \frac{4}{5}$ $(= 0{,}8)$ und $P[D \mid M^c] = \frac{1}{10}$ $(= 0{,}1)$.

a) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $P[D \cap M]$. Wir berechnen sie mit Hilfe der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$P[D \cap M] = P[D \mid M]P[M] = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25} \ (= 0{,}04).$$

b) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $P[D^c]$. Wir berechnen sie durch Anwendung des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P[D^c] &= P[D^c \mid M]P[M] + P[D^c \mid M^c]P[M^c] \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{9}{10} \cdot \frac{4}{5} = \frac{22}{25} \ (= 0{,}88). \end{aligned}$$

c) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $P[D \cup M]$. Wir berechnen sie durch Übergang zum Komplement und mit Hilfe der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P[D \cup M] &= 1 - P[D^c \cap M^c] \\ &= 1 - P[D^c \mid M^c]P[M^c] \\ &= 1 - \frac{9}{10} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{25} \ (= 0{,}28). \end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg: Mit den Ergebnissen aus **a)** und **b)** erhält man

$$\begin{aligned} P[D \cup M] &= P[D] + P[M] - P[D \cap M] \\ &= 1 - P[D^c] + P[M] - P[D \cap M] \\ &= \left(1 - \frac{22}{25}\right) + \frac{1}{5} - \frac{1}{25} = \frac{7}{25} \ (= 0{,}28). \end{aligned}$$

d) Die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit $P[M \mid D^c]$ erhält man durch Anwendung der Formel von Bayes:

$$P[M \mid D^c] = \frac{P[D^c \mid M]P[M]}{P[D^c]} = \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{22}{25}} = \frac{2}{11} \ (= 0{,}1818\ldots).$$

e) Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten k Chips, die unabhängig voneinander defekt bzw. funktionsfähig sind. Dann sind die Ereignisse $D_i :=$"Chip i ist defekt", $i = 1, \ldots, k$ unabhängig. Das Ereignis $E_k :=$"mindestens einer der k Chips funktioniert" lässt sich dann schreiben als $E = \bigcup_{i=1}^{k} D_i^c$. Bemerke, dass $P[D_i] = P[D]$ für alle $i = 1, \ldots, k$.

Siehe nächstes Blatt!

Durch Übergang zum Komplement und Ausnützen der Unabhängigkeit erhalten wir nun

$$P[E_k] = 1 - P[E_k^c] = 1 - P\left[\bigcap_{i=1}^{k} D_i\right] = 1 - \prod_{i=1}^{k} P[D_i] = 1 - (P[D])^k .$$

Wir wollen nun alle $k \in \mathbb{N}$ bestimmen, so dass $P[E_k] \geq 0{,}999$. D.h.

$$\begin{aligned} P[E_k] = 1 - (P[D])^k &\overset{!}{\geq} 0{,}999 \\ \Leftrightarrow (P[D])^k &\leq 0{,}001 \\ \Leftrightarrow k \log(P[D]) &\leq \log(0{,}001) \\ \Leftrightarrow k &\geq \frac{\log(0{,}001)}{\log(P[D])} = \frac{\log(0{,}001)}{0{,}15} = 3{,}64 \end{aligned}$$

Benjamin muss also mindestens 4 Chips bestellen.

3. a)

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \vartheta^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda(x+y)}dxdy =$$

$$\vartheta^2 \int_0^\infty e^{-\lambda y} \int_0^\infty e^{-\lambda x} dxdy = \vartheta^2 \int_0^\infty e^{-\lambda y} \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big|_{x=0}^{x=\infty} dy = \frac{\vartheta^2}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda y}dy = \frac{\vartheta^2}{\lambda^2}.$$

b) For each $x \in [0, \infty)$, we have

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda(x+y)}dy =$$

$$\lambda^2 e^{-\lambda x} \int_0^\infty e^{-\lambda y}dy = \lambda^2 e^{-\lambda x} \frac{e^{-\lambda y}}{-\lambda}\Big|_{y=0}^{y=\infty} = \lambda e^{-\lambda x}.$$

If $x \in (-\infty, 0)$, we have

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} 0dy = 0.$$

c) As in b), we have $f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}$ for $y \in [0, \infty)$, and $f_Y(y) = 0$ for $y \in (-\infty, 0)$, thus in particular $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, proving that X and Y are independent.

d) Due to the independence of X and Y, we get

$$Cov(X+Y, X) = Cov(X,X) = V(X) = X[X^2] - (E[X])^2.$$

By using the hint, we get:

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}dx = \lambda \frac{2}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2},$$

and

$$(E[X])^2 = \left(\int_0^\infty x f_X(x)\right)^2 = \left(\lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx\right)^2 = \lambda^2 \frac{1}{\lambda^4} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Hence, $Cov(X+Y, X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

e) Let $x_1, ..., x_N$ positive real numbers and consider the log-likelihood function

$$L(\lambda, x_1, ..., x_N) = \sum_{i=1}^{N} \log f_X(x_i) = N \log \lambda - \lambda(x_1 + ... + x_N).$$

After differentiating and equalizing the above function to 0, we obtain

$$\frac{N}{\widehat{\lambda}} - \sum_{i=1}^{N} x_i = 0,$$

yielding

$$\widehat{\lambda} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} x_i}.$$

4. **a)**

- Die Null- und Alternativhypothese lauten

$$H_0 : \mu = \mu_0 := 1000\,\Omega \qquad\qquad H_A : \mu < \mu_0.$$

- Zwei Lösungswege
  - Dass die tatsächlichen Werte mit Wahrscheinlichkeit 99% höchstens $10\,\Omega$ vom Mittelwert abweichen, bedeutet wegen der Symmetrie von $\mathcal{N}(1000, \sigma^2)$ und 1000 soviel wie $q_{0.995} = 1010$ und wegen $q_{0.995} = z_{0.995}\sigma + 1000$ folgt daraus $\sigma = \frac{10}{z_{0.995}} = \frac{10}{2.58} = 3.88\,\Omega$.
  - Dass die tatsächlichen Werte mit Wahrscheinlichkeit 99% höchstens $10\,\Omega$ vom Mittelwert abweichen bedeutet soviel wie $P(990 \le R \le 1010) = 0.99$, wegen $P(990 \le R \le 1010) = \Phi\left(\frac{1010-1000}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{990-1000}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-10}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - 1$, also $0.99 = 2\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - 1$ bzw. $\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0.995$ woraus genauso $z_{0.995} = \frac{10}{\sigma}$ und somit $\sigma = \frac{10}{z_{0.995}}$ folgt.
- Da σ bekannt ist und die Daten normalverteilt sind verwenden wir den z-Test. Die Teststatistik bzw. deren Realisierung ist gegeben durch

$$T = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{997 - 1000}{3.88(4.2)}\sqrt{50} = -5.47(-5.05).$$

Der Verwerfungsbereich ist $VB_{2.5\%} = (-\infty, z_{0.025}] = (-\infty, -1.96]$. Und wegen $-5.47(-5.05) \in VB_{2.5\%}$ wird die Nullhypothese (klar) verworfen.

Siehe nächstes Blatt!

b)

- Zweiseitiges Vertrauensintervall: Um $t_{49,0.975}$ zu bestimmen wählen wir den nächstliegenden Wert in der Tabelle, d.h. $t_{49,0.975} \approx t_{40,0.975} = 2.021$. Die Realisierung des zweiseitigen 95%-Vertrauensintervalls ist daher

$$\left[\hat{\mu} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{49,0.975}\right] = \left[997 \pm \frac{3.52}{\sqrt{50}} 2.021\right] = [996, 998].$$

  Einseitiges Vertrauensintervall: Um $t_{49,0.95}$ zu bestimmen wählen wir den nächstliegenden Wert in der Tabelle, d.h. $t_{49,0.95} \approx t_{40,0.95} = 1.684$. Die Realisierung des einseitigen 95%-Vertrauensintervalls ist daher

$$\left(-\infty, \hat{\mu} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{49,0.95}\right] = \left(-\infty, 997 + \frac{3.52}{\sqrt{50}} 1.684\right] = (-\infty, 997.84].$$

  Da Werte unter 0 rein theoretisch sind, kann man auch $[0, 997.84)$ schreiben.
- Wenn wir die Streuung empirisch ermitteln müssen, wird der t-Test gewählt.

c) Wenn die tatsächliche Verteilung durch $\mathcal{N}(998, 3^2)$ gegeben ist, dann ist $\hat{\mu} \sim \mathcal{N}\left(998, \frac{3^2}{n}\right)$.

2 Lösungswege:

- Also ist $\hat{\mu} - \mu_0 \sim \mathcal{N}\left(998 - 1000, \frac{3^2}{n}\right) = \mathcal{N}\left(-2, \frac{3^2}{n}\right)$ und somit $T = \frac{\hat{\mu}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}\left(\frac{-2}{\sigma}\sqrt{n}, \frac{3^2}{\sigma^2}\right)$, der Fehler 2.Art ist daher

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(T \notin VB_{2.5\%}\right) &= \mathbb{P}\left(T > -1.96\right) = 1 - \mathbb{P}\left(T \leq -1.96\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-1.96 + \frac{2}{\sigma}\sqrt{50}}{\frac{3}{\sigma}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{-1.96\sigma + 2\sqrt{50}}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-1.96 \cdot 3.88(4.2) + 2\sqrt{50}}{3}\right) \\ &= 1 - \Phi(2.179(1.97)) = 1 - 0.98537(0.9756) = 0.01463(0.0244).\end{aligned}$$

- Wir bestimmen zuerst den Verwerfungsbereich für $\hat{\mu}$. Die Nullhypothese wird verworfen falls $\hat{\mu} \in VB^{\hat{\mu}}_{2.5\%}$ woraus sich wegen $z_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \mu_0 = -1.96\frac{3.88(4.2)}{\sqrt{50}} + 1000 = 998.9245(998.8358)$ ein Verwerfungsbereich von $VB^{\hat{\mu}}_{2.5\%} = (-\infty, 998.9245(998.8358)]$ ergibt, der Fehler 2.Art ist daher

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\hat{\mu} \notin VB^{\hat{\mu}}_{2.5\%}\right) &= \mathbb{P}\left(\hat{\mu} > 998.9245(998.8358)\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\hat{\mu} \leq 998.9245(998.8358)\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{998.9245(998.8358) - 998}{\frac{3}{\sqrt{50}}}\right) \\ &= 1 - \Phi(2.179(1.97)) = 1 - 0.98537(0.9756) = 0.01463(0.0244).\end{aligned}$$