Prof. Dr. P. Embrechts ETH Zürich Winter 2012

Stochastik
(BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

Schreiben Sie für Aufgabe 2-4 stets alle Zwischenschritte und -rechnungen sowie Begründungen auf. Aufgabe 1 ist eine Multiple Choice Aufgabe (keine Begründungen notwendig).

Die für die Aufgaben benötigten Tabellen (Normalverteilung, Quantile der t-Verteilung, Vertrauensintervall für die Binomialverteilung, Verwerfungsbereiche für den Wilcoxon-Test) wurden mit der Prüfung ausgeteilt.

1. (10 Punkte)

Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig. Es gibt pro richtig beantwortete Frage 1 Punkt und pro falsche Antwort 1/2 Punkt Abzug. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte. **Bitte benützen Sie das beiliegende Antwortblatt.**

a) Seien X und Y zwei unabhängige $\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$-verteilte Zufallsvariablen. Dann ist $X-Y$

1. identisch 0.
2. $\mathcal{N}\left(0,2\sigma^2\right)$-verteilt.
3. $\mathcal{N}\left(0,\frac{1}{2}\sigma^2\right)$-verteilt.

b) Seien X und Y zwei unkorrelierte Zufallsvariablen. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

1. $\mathbb{V}(XY)=\mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)$.
2. X und Y sind unabhängig.
3. $\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)$.

c) Gegeben sei die folgende Wahrscheinlichkeitsmatrix zweier diskreten Zufallsvariablen X und Y welche nur die Werte 0 und 1 annehmen können:

$X \setminus Y$	0	1	
0	0.4	b	
1	0.1	d	

Bitte wenden!

Können b und d so gewählt werden dass X und Y unabhängig sind?

1. Nein.
2. Ja, $b = 0.4$ und $d = 0.1$.
3. Ja, $b = 0.1$ und $d = 0.4$.

d) Herr Philipp D. fährt jeden Tag mit dem Taxi zur Arbeit, und wählt dabei mit gleicher Wahrscheinlichkeit eines der beiden Taxiunternehmen A oder B. Wenn er Taxiunternehmen A wählt kommt er in 85% aller Fälle unter 5 Minuten zur Arbeit, bei Taxiunternehmen B nur in 80% aller Fälle. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mit Taxiunternehmen A unterwegs war wenn er in weniger als 5 Minuten bei der Arbeit erschienen ist.

1. 0.4444.
2. 0.5152.
3. 0.6667.

e) Seien $1.7460353, 0.6588217, -0.2870716$ Realisierungen einer $\mathcal{N}(0,1)$-verteilten Zufallsvariable. Aus welchen Realisierungen eine Uni $[0,1]$-verteilten Zufallsvariable sind diese entstanden?

1. $0.9595976, 0.5534121, -0.1196833$.
2. $0.9595976, 0.7449949, 0.3870287$.
3. $0.9595976, 0.7449949, 0.5176285$.

f) Bei einem statistischen Test hängt der P-Wert

1. von der Stichprobe ab.
2. vom Fehler 1.Art ab.
3. von der Stichprobe und vom Fehler 1.Art ab.

g) Bei einem statistischen Test hat man folgende Hypothesen: $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_A : \mu \neq \mu_0$. Nehmen wir nun an der tatsächliche Wert von μ sei nicht μ_0. Wie hängt der Fehler 2.Art vom tatsächlichen μ ab?

1. Der Fehler 2.Art hängt nicht vom tatsächlichen μ ab.
2. Je größer das tatsächliche μ, desto kleiner der Fehler 2.Art.
3. Im Fall $\mu < \mu_0$ gilt je größer μ desto größer der Fehler 2.Art, im Fall $\mu > \mu_0$ gilt je größer μ desto kleiner der Fehler 2.Art.

h) Wir betrachten zwei t-Tests zum selben Niveau α und der selben Null- bzw. Alternativhypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ bzw. $H_A : \mu < \mu_0$, auch die Stichprobengröße n ist bei beiden Tests gleich groß. Wir haben die beobachteten Teststatistiken beider Test gegeben und wissen dass der erste Test die Nullhypothese verwirft. Welche Aussage ist richtig?

1. Wenn die beobachtete Teststatistik beim zweiten Test kleiner ist als beim ersten Test, dann wird die Nullhypothese verworfen.

Siehe nächstes Blatt!

2. Wenn die beobachtete Teststatistik beim zweiten Test größer ist als beim ersten Test dann wird die Nullhypothese nicht verworfen.
3. In keinem Fall, egal in welcher Beziehung die beobachteten Teststatistiken stehen, kann eine Aussage getroffen werden.

i) Wir beobachten Realisierungen einer stetigen Zufallsvariable. Die Form des Histogramms nähert sich bei geeigneter Skalierung mit wachsender Stichprobengröße immer mehr der

1. Dichtefunktion der beobachteten Verteilung.
2. Dichtefunktion einer Normalverteilung.
3. Dichtefunktion einer uniformen Verteilung.

j) Acht Testfahrer nehmen an einem Reifentest teil. Es soll Reifentyp A mit Reifentyp B verglichen werden. Dabei testet jeder Fahrer beide Reifentypen auf einem Parkour jeweils mit dem selben Auto bei den selben Umweltbedingungen. Die folgenden Umlaufzeiten (in Sekunden) werden dabei gemessen:

Fahrer Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
Reifentyp A	45.8	37.9	42.3	35.7	51.7	44.9	39.7	40.1
Reifentyp B	43.5	35.8	43.1	34.3	50.3	47.8	39.5	39.5

Lässt sich mit einem Vorzeichen-Test auf dem 5%-Niveau bestätigen dass Reifentyp B schneller ist?

1. Ja.
2. Nein.
3. Weder noch, da der Verwerfungsbereich die leere Menge ist.

Bitte wenden!

2. (7 Punkte) Ein Computerchiphersteller C produziert an jedem der 5 Werktage einer Woche jeweils 200 Chips. Es ist bekannt, dass am Montag produzierte Chips mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% defekt sind. An anderen Werktagen produzierte Chips sind dagegen mit 90% Wahrscheinlichkeit funktionsfähig. Anna bestellt nun einen Chip bei C. Die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Chip an einem bestimmten Wochentag produziert wurde sei gleich dem Verhältnis der Produktionsmenge dieses Wochentags zur Gesamtproduktionsmenge einer Woche.

a) Einen defekten, an einem Montag produzierten Chip nennen wir "Montagschip". Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Annas Chip ein Montagschip ist?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Annas Chip funktionsfähig?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Chip defekt oder am Montag produziert worden?

d) Der Postbote bringt nun Anna den Chip. Anna baut den Chip in ihren Computer ein und stellt fest, dass der Chip funktionsfähig ist. Wie gross ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass der Chip am Montag produziert wurde?

e) Benjamin benötigt möglichst bald einen neuen, funktionsfähigen Computerchip von Hersteller C. Da er weiss, dass die Chips von C sehr oft defekt sind, aber die genaue Wahrscheinlichkeit dafür nicht kennt, geht er davon aus, dass jeder Chip mit Wahrscheinlichkeit 0.15 defekt ist. Daraus berechnet er nun die Anzahl der Chips die er mindestens bestellen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99.9% mindestens einer davon funktionstüchtig ist. Wie viele Chips bestellt sich Benjamin?

Hinweis: Es kann angenommen werden, dass alle gelieferten Chips unabhängig voneinander defekt oder funktionsfähig sind.

Siehe nächstes Blatt!

3. (9 Punkte) Sei $D := \{(x,y) : x, y \geq 0\}$ (der erste Quadrant im zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem) und $\vartheta, \lambda > 0$ zwei positive reelle Zahlen. Die Zufallsvariablen X und Y besitzen die gemeinsame Dichtefunktion

$$f_{X,Y}(x,y) := \begin{cases} \vartheta^2 e^{-\lambda(x+y)} & (x,y) \in D, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie dass $\vartheta = \lambda$.

b) Zeigen Sie dass die Dichtefunktion von X gegeben ist durch

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

c) Zeigen Sie dass X und Y unabhängig sind.

d) Berechnen Sie $\mathrm{Cov}\,(X+Y, X)$ in Abhängigkeit von λ.
Hinweis: $\int_0^\infty te^{-ct}dt = \frac{1}{c^2}$ und $\int_0^\infty t^2 e^{-ct}dt = \frac{2}{c^3}$, für alle $c > 0$.

e) Wie lautet der Maximum-Likelihood Schätzer für den Parameter λ, basierend auf n unabhängigen Beobachtungen von X?

Bitte wenden!

4. (8 Punkte) Der Elektrotechniker Josef T. benötigt zum Bau eines empfindlichen Messgerätes unter anderem 10 elektrische Widerstände vom Wert $1000\,\Omega$ (Bemerkung: Der elektrische Widerstand hat die SI-Einheit Ohm, sein Einheitenzeichen ist Ω). Da die Anforderungen an die Genauigkeit sehr gross sind und die Werte der Widerstände einer Toleranz unterworfen sind, kauft er beim Hersteller seiner Wahl 50 Stück $1000\,\Omega$-Widerstände, in der Hoffnung, dass 10 davon seinen Ansprüchen genügen. Gemäss den Angaben des Herstellers ist der Wert der Widerstände normalverteilt mit Erwartungswert $1000\ \Omega$, wobei sich der tatsächliche Wert mit 99 % Wahrscheinlichkeit im Bereich $[990, 1010]\,\Omega$ befindet. Beim Durchmessen der gekauften Widerstände entsteht der Verdacht, dass der tatsächliche Mittelwert μ der Widerstandswerte kleiner als $1000\,\Omega$ ist. Die Messungen ergeben einen empirischen Erwartungswert von $\hat{\mu} = 997\,\Omega$. Im Folgenden wird der Messfehler des verwendeten Messgerätes vernächlässigt und angenommen, dass die Widerstandswerte unabhängig und identisch verteilt sind, gemäss der Normalverteilung mit Mittelwert μ und σ.

a) Führen Sie einen Test auf dem 2.5%-Niveau durch um zu beurteilen, ob der Erwartungswert der Widerstände weniger als $1000\,\Omega$ beträgt.

- Formulieren Sie Null- und Alternativhypothese.
- Berechnen Sie die Standardabweichung σ.
- Welchen Test verwenden Sie? Wie entscheidet der Test?
  Hinweis: Falls Sie die Standardabweichung σ nicht berechnet haben, verwenden Sie für diese Rechung den (falschen) Wert $\sigma = 4.2\,\Omega$.

b) Sei nun σ unbekannt (d.h. wir misstrauen den Angaben des Herstellers die Streuung betreffend) und die empirische Standardabweichung aus den Messdaten gegeben durch $s = 3.52\,\Omega$.

- Konstruieren Sie das 95% Vertrauensintervall für den Erwartungswert μ.
- Welchen Test würden Sie unter diesen Umständen durchführen?

c) Nehmen wir nun an die Widerstandswerte seien in Wirklichkeit normalverteilt mit Mittelwert $\mu = 998\,\Omega$ und Streuung $\sigma = 3\,\Omega$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art für den in **a)** bestimmten Test.