Stochastik - Lösungsskizze (BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

1. **a)** 2. **b)** 1. **c)** 2. **d)** 1. **e)** 3. **f)** 3. **g)** 3. **h)** 1. **i)** 2. **j)** 2.

2. Seien

- B1 = {Alice fährt mit der Linie 1 zur Arbeit},
- B2 = {Alice fährt mit der Linie 2 zur Arbeit},
- B3 = {Alice fährt mit der Linie 3 zur Arbeit},
- K = {Alice wird auf dem Arbeitsweg kontrolliert},
- NK = {Alice wird auf dem Arbeitsweg nicht kontrolliert}.

Ferner wissen wir aus der Aufgabenstellung: $\mathbb{P}[B1] = \mathbb{P}[B2] = \mathbb{P}[B3] = 1/3$, $\mathbb{P}[K|B1] = 1/5$, und $\mathbb{P}[K|B2] = \mathbb{P}[K|B3] = 1/6$.

a) Mit dem Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[NK] &= 1 - \mathbb{P}[K] \\
&= 1 - (\mathbb{P}[K|B1]\mathbb{P}[B1] + \mathbb{P}[K|B2]\mathbb{P}[B2] + \mathbb{P}[K|B3]\mathbb{P}[B3]) \\
&= 1 - (1/5 \cdot 1/3 + 1/6 \cdot 1/3 + 1/6 \cdot 1/3) = 37/45.
\end{aligned}$$

b) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[B1^c \cup NK]$. Mit der Bayes' Formel erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[B1^c \cup NK] &= \mathbb{P}[B1^c \cup K^c] \\
&= \mathbb{P}[(B1 \cap K)^c] \\
&= 1 - \mathbb{P}[(B1 \cap K)] \\
&= 1 - \mathbb{P}[K|B1]\mathbb{P}[B1] \\
&= 1 - 1/5 \cdot 1/3 = 14/15.
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

c) Der Aufgabenstellung entnehmen wir, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bus der Linie 1 vorbeikommt nun $j/(j+2)$ entspricht, während die Wahrscheinlichkeit für einen Bus der Linie 2 und 3 bei $1/(j+2)$ liegt. Wir müssen j folglich so bestimmen, so dass $\mathbb{P}[B2 \cup B3|K] \geq 0.25$ ist. Ähnlich wie bei Teilaufgabe b) können wir zuerst $\mathbb{P}[K]$ berechnen:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[K] &= \mathbb{P}[K|B1]\mathbb{P}[B1] + \mathbb{P}[K|B2]\mathbb{P}[B2] + \mathbb{P}[K|B3]\mathbb{P}[B3] \\ &= 1/5 \cdot j/(j+2) + 2 \cdot 1/(j+2) \cdot 1/6.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Bayes' Formel erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[B2 \cup B3|K] &= \mathbb{P}[B1^c|K] \\ &= 1 - \mathbb{P}[B1|K] \\ &= 1 - \frac{\mathbb{P}[K|B1]\mathbb{P}[B1]}{\mathbb{P}[K]} \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{j}{j+2}}{\frac{j}{5(j+2)} + \frac{1}{3(j+2)}} \\ &= \frac{\frac{1}{3(j+2)}}{\frac{j}{5(j+2)} + \frac{1}{3(j+2)}} = \frac{5}{5+3j} \geq \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Das Auflösen nach j ergibt $j \leq 5$.

d) Da Alice genau zweimal mit dem Fahrrad und dreimal mit dem Bus fährt, können die vier Kontrollen wie folgt auftreten: Einmal beim Fahrradfahren und dreimal beim Busfahren oder zweimal beim Fahrradfahren und zweimal beim Busfahren. Da die Kontrollen unabhängig voneinander stattfinden folgt

$$\begin{aligned}P[\text{4 Mal Kontrolle}] &= P[\text{1 Kontrolle bei Fahrrad und 3 Kontrollen bei Bus}] \\ &\quad + P[\text{2 Kontrollen bei Fahrrad und 2 Kontrollen bei Bus}] \\ &= 2p_1(1-p_1)p_2^3 + 3p_1^2p_2^2(1-p_2).\end{aligned}$$

3. **a)** Für $x \leq 0$ ist $f_X(x) = 0$. Falls $x > 0$,

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y = \int_x^{\infty} cx^2(y-x)\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y \\ &= cx^2\int_x^{\infty} y\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y - cx^3\int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y \\ &\overset{\text{P.I.}}{=} cx^2\left[-y\mathrm{e}^{-y}\right]_x^{\infty} + c(x^2 - x^3)\int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y \\ &= cx^3\mathrm{e}^{-x} + c(x^2-x^3)\mathrm{e}^{-x} = cx^2\mathrm{e}^{-x}.\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Für $y \leq 0$ ist $f_Y(y) = 0$. Falls $y > 0$,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x = \int_0^y cx^2(y-x)\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x \\ &= c\mathrm{e}^{-y}\int_0^y yx^2 - x^3\mathrm{d}x = c\mathrm{e}^{-y}\left[\frac{1}{3}yx^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^y \\ &= \frac{c}{12}y^4\mathrm{e}^{-y}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Also $X \sim \text{Gamma}(k=3, \theta=1)$ und $Y \sim \text{Gamma}(k=5, \theta=1)$.

b)

$$1 \overset{!}{=} \int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = c\int_0^{\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \overset{\textit{Hinweis}}{=} c\cdot 2! = 2c \quad\Longrightarrow\quad c = \frac{1}{2}.$$

c)

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)\mathrm{d}x = c\int_0^{\infty} x^3\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \overset{\textit{Hinweis}}{=} c\cdot 3! = 3,$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)\mathrm{d}y = \frac{c}{12}\int_0^{\infty} y^5\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y \overset{\textit{Hinweis}}{=} c\cdot 5!/12 = 5,$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY] &= \int_{\mathbb{R}^2} xyf_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c\int_0^{\infty} y\mathrm{e}^{-y}\int_0^y (yx^3 - x^4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= c\int_0^{\infty} y\mathrm{e}^{-y}\left[\frac{1}{4}yx^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^y \mathrm{d}y = \frac{c}{20}\int_0^{\infty} y^6\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y \overset{\textit{Hinweis}}{=} \frac{c}{20}6! = 18, \end{aligned}$$

$$\text{Cov}[X,Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 18 - 15 = 3.$$

d) Falls $z > 0$ erhalten wir für die Randdichte von Z

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Z}(x,z)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} cx^2z\mathrm{e}^{-(x+z)}\mathrm{d}x \\ &= cz\mathrm{e}^{-z}\int_0^{\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = cz\mathrm{e}^{-z}\cdot 2 \\ &= z\mathrm{e}^{-z}. \end{aligned}$$

Für $z < 0$ ist $f_Z(z) = 0$. Falls $x, z > 0$,

$$f_{X,Z}(x,z) = cx^2\mathrm{e}^{-x}\cdot z\mathrm{e}^{-z} = f_X(x)\cdot f_Z(z),$$

ansonsten ist $f_{X,Z}(x,z) = 0 = f_X(x)\cdot f_Z(z)$. Da die gemeinsame Dichte sich als das Produkt der Randdichten ausdrücken lässt, sind X und Z unabhängig.

Bitte wenden!

e) Log-Likelihood:

$$\begin{aligned}
\ell(\theta|z_1,\dots,z_n) &= \log\left(\left(\prod_{i=1}^n z_i\right)\exp\{-\sum_{i=1}^n z_i/\theta\}/\theta^{2n}\right)\\
&= \sum_{i=1}^n \log(z_i) - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n z_i - 2n\log\theta\\
\ell(\theta)' &= \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^n z_i - \frac{2n}{\theta} \overset{!}{=} 0\\
\Rightarrow \quad \hat{\theta} &= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n Z_i
\end{aligned}$$

Wir prüfen, dass $\hat{\theta}$ ein Maximum ist:

$$\ell(\hat{\theta})'' = -\frac{2}{\hat{\theta}^3}\sum_{i=1}^n z_i + \frac{2n}{\hat{\theta}^2} = -(2n)^3/(\sum_{i=1}^n z_i)^2 < 0.$$

4. **a)** Modell: $X_1,\dots,X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ und $\sigma = 0.3$.

Nullhypothese $H_0 : \mu = \mu_0 = 9.75$ und Alternative $H_A : \mu \neq 9.75$. (zweiseitiger Test).

b) $X_1,\dots,X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ und $\sigma = 0.3$ ist bekannt, also z-Test mit Teststatistik

$$Z = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, \quad n = 5.$$

Unter H_0 ist $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

c) Der Verwerfungsbereich ist

$$VB_{5\%} = \{|z| \geq z_{0.975} = 1.96\}.$$

Mit den beobachteten Werten erhalten wir $\bar{x}_5 = 9.32$ und

$$z = \frac{\bar{x}_5 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{5}} = \frac{9.32 - 9.75}{0.3/\sqrt{5}} = -3.2.$$

Also $|z| = 3.2 \in VB_{5\%}$ und die Nullhypothese wird somit verworfen.

d) Der P-Wert ist $\mathbb{P}_{9.75}(|Z| \geq 3.2) = 2(1 - \Phi(3.2)) = 0.0014$.

e) Die Macht des Tests für $\mu = 9.9 \neq \mu_0$, ist die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 richtigerweise verworfen wird, wenn $\mu = 9.9$. Wir verwerfen H_0, wenn $|Z| = \left|\frac{\bar{X}_5 - 9.75}{0.3/\sqrt{5}}\right| \geq$

Siehe nächstes Blatt!

1.96, also erhalten wir für die Macht

$$\begin{aligned}
1-\beta(9.9) &= \mathbb{P}_{\mu=9.9}[|Z|\geq 1.96] \\
&= 1-\mathbb{P}_{\mu=9.9}[-1.96\leq Z\leq 1.96] \\
&= 1-\mathbb{P}_{\mu=9.9}[-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{5}}+\mu_0-\mu\leq \bar{X}_5-\mu\leq 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{5}}+\mu_0-\mu] \\
&= 1-\mathbb{P}_{\mu=9.9}\left[-1.96+\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{5}}\leq\frac{\bar{X}_5-\mu}{\sigma/\sqrt{5}}\leq 1.96+\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{5}}\right] \\
&= 1-\mathbb{P}_{\mu=9.9}\left[-1.96+\frac{9.75-9.9}{0.3/\sqrt{5}}\leq\frac{\bar{X}_5-\mu}{\sigma/\sqrt{5}}\leq 1.96+\frac{9.75-9.9}{0.3/\sqrt{5}}\right] \\
&= 1-\mathbb{P}_{\mu=9.9}\left[-0.84\leq\frac{\bar{X}_5-\mu}{\sigma/\sqrt{5}}\leq 3.08\right] \\
&= 1-\Phi(3.08)+\Phi(-0.84) \\
&= 2-\Phi(3.08)-\Phi(0.84) \\
&= 20.15\%.
\end{aligned}$$