Musterlösung
Stochastik
(D-MAVT / D-MATL / RW)

1. **a)** Da die Funktion f ein Dichte ist, muss $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ gelten. Ausmultiplizieren und Integrieren ergibt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{10}(1-x)^2 dx &= \int_0^1 x^{10} - 2x^{11} + x^{12} dx \\
&= \left(\frac{1}{11}x^{11} - \frac{2}{12}x^{12} + \frac{1}{13}x^{13}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{11} - \frac{2}{12} + \frac{1}{13} \\
&= \frac{2}{11 \cdot 12 \cdot 13} = \frac{1}{858} \approx 1.1655012 \cdot 10^{-3}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt,dass die Konstante $c = 858$ ist.

b)

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_0^1 xc(x^{10} - 2x^{11} + x^{12})dx \\
&= c\left(\frac{1}{12}x^{12} - \frac{2}{13}x^{13} + \frac{1}{14}x^{14}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= c\left(\frac{1}{12} - \frac{2}{13} + \frac{1}{14}\right) \\
&= c\frac{2}{12 \cdot 13 \cdot \ 14} = c\frac{1}{1092} = \frac{11}{14} \approx 0.7857142
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \int_0^1 x^2 c(x^{10} - 2x^{11} + x^{12})dx \\
&= c\left(\frac{1}{13}x^{13} - \frac{2}{14}x^{14} + \frac{1}{15}x^{15}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= c\left(\frac{1}{13} - \frac{2}{14} + \frac{1}{14}\right) \\
&= c\frac{2}{13 \cdot 14 \cdot \ 15} = c\frac{1}{1365} = \frac{11 \cdot 12}{14 \cdot 15} = \frac{22}{35} \approx 0.6285714
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \frac{11 \cdot 12}{14 \cdot 15} - \left(\frac{11}{14}\right)^2 \\
&= \frac{11}{14^2 \cdot 15} \approx 0.0112244
\end{aligned}$$

$$E[G] = E[14X] = 14E[X] = 11$$

$$Var(G) = Var(14X) = 14^2 Var(X) = 2.2$$

Bitte wenden!

c) G_i iid $i = 1, \dots 1500$

$$E[\sum_{i+1}^{1500} G_i] = \sum_{i+1}^{1500} E[G_i] = 1500E[G] = 165000$$

$$Var(\sum_{i+1}^{1500} G_i) \overset{G_i \text{ unabhängig}}{=} \sum_{i+1}^{1500} Var(G_i) = 1500Var(G) = 3300$$

d) Nach dem ZGS gilt: $S_{1500} = \sum_{i=1}^{1500} G_i \overset{approx}{\sim} N(16500, 3300)$

$$P(S_{1500} \geq 16610) = P(\frac{S_{1500} - 16500}{\sqrt{3300}} \geq \frac{16610 - 16500}{\sqrt{3300}}) \approx 1 - \Phi(1.9148542) \approx 0.0278,$$

Nach der Tabelle sind 0.0274 oder 0.0281 auch in Ordnung.

e) Nach dem ZGS gilt wieder: $S_n = \sum_{i=1}^{n} G_i \overset{approx}{\sim} N(n \cdot 11, n \cdot 2.2)$. Wie in Aufgabenteil d) folgt

$$P(S_n \geq 16610) = P(\frac{S_n - n \cdot 11}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{2.2}} \geq \frac{16610 - n \cdot 11}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{2.2}}) \approx 1 - \Phi\left(\frac{16610 - n \cdot 11}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{2.2}}\right) = 0.05$$

und somit

$$\frac{16610 - n \cdot 11}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{2.2}} = \Phi^{-1}(0.95) = 1.645.$$

Dies führt auf die Wurzelgleichung

$$11n + \Phi^{-1}(0.95)\sqrt{2.2}\sqrt{n} - 16610 = 0. \tag{1}$$

Die Substitution $x = \sqrt{n}$ ergibt die quadartische Gleichung

$$11x^2 + \Phi^{-1}(0.95)\sqrt{2.2}x - 16610 = 0$$

mit den Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-\Phi^{-1}(0.95)\sqrt{2.2} \pm \sqrt{\left(\Phi^{-1}(0.95)\sqrt{2.2}\right)^2 + 4 \cdot 11 \cdot 16610}}{2 \cdot 11},$$

d.h. für $\Phi^{-1}(0.95) = 1.645$

$$x_1 = 38.747971$$

$$x_2 = -38.969783$$

(und entsprechend $x_1 = 38.748307$ oder $x_1 = 38.747635$ für $\Phi^{-1}(0.95) = 1.64$ bzw. $\Phi^{-1}(0.95) = 1.65$). Einsetzen von $x_{1,2}^2$ in die Ausgangsgleichung (1) ergibt, dass nur $x_1^2 = 1501.3792$ eine Lösung ist und somit $n = 1501$ ist.

2. a) Wir definieren die folgenden Ereignisse:
A: Haus stürzt ein.
A^c: Haus stürzt nicht ein.
H: Das Haus besteht aus Holz.
B: Das Haus besteht aus Beton.
Z: Das Haus besteht aus Ziegel.
Aus der Aufgabenstellung folgt:
$\mathbb{P}[H] = 0.2$, $\mathbb{P}[B] = p$, $\mathbb{P}[Z] = 0.8 - p$,
$\mathbb{P}[A|H] = 0.3$, $\mathbb{P}[A|B] = 0.1$, $\mathbb{P}[A|Z] = 0.2$.
Somit gilt mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A] &= \mathbb{P}[A|H]\mathbb{P}[H] + \mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[A|Z]\mathbb{P}[Z] \\ &= 0.3 \cdot 0.2 + 0.1p + 0.2 \cdot 0.8 - 0.2p \\ &= 0.22 - 0.1p \leq 0.15, \\ & \Rightarrow 0.07 \leq 0.1p, \\ & \Rightarrow p \in [0.7, 1]. \end{aligned}$$

b) Mit $p = 0.75$ folgt $\mathbb{P}[B \cap A] = \mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}[B] = 0.1 \cdot 0.75 = 7.5\%$.

c) Mit $p = 0.75$ und dem Satz von Bayes folgt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[B|A^c] &= \frac{\mathbb{P}[A^c|B]\mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[A^c|B]\mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[A^c|H]\mathbb{P}[H] + \mathbb{P}[A^c|Z]\mathbb{P}[Z]} \\ &= \frac{0.9 \cdot 0.75}{0.9 \cdot 0.75 + 0.7 \cdot 0.2 + 0.8 \cdot 0.05} \\ &= \frac{135}{171} = \frac{15}{19} = 78.95\%.\end{aligned}$$

d) N_1, N_2 iid $\sim$ Pois(0.1) $\quad \Rightarrow \quad N_1 + N_2 \sim$ Pois(0.2). Somit gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[N_1 + N_2 \geq 2] &= 1 - e^{-2\lambda} - 2\lambda e^{-2\lambda} \\ &= 1 - 1.2e^{-0.2} \\ &= 1.75\%.\end{aligned}$$

Alternativ:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[N_1 + N_2 \geq 2] &= 1 - (\mathbb{P}[N_1 = 0])^2 - 2\mathbb{P}[N_1 = 1]\mathbb{P}[N_1 = 0] \\ &= 1 - e^{-2\lambda} - 2\lambda e^{-2\lambda} \\ &= 1 - 1.2e^{-0.2} \\ &= 1.75\%.\end{aligned}$$

3. **a)** (ii)

b) (iv)

c) (iv)

d) Die zu betrachtende Teststatistik lautet:

$$T := \sqrt{5}\frac{\bar{X}_{10} - \bar{Y}_{10}}{s_{pool}}.$$

Unter der Nullhypothese ist die Zufallsvariable T t-verteilt mit 18 Freiheitsgraden. Da der Test zweiseitig ist, wird die Nullhypothese verworfen, wenn

$$|T| \geq t(18, 97.5\%),$$

wobei $t(18, 97.5\%)$ das 97.5%-Quantile der t-Verteilung mit 18 Freihaitsgraden darstellt. Von der Tabelle der Quantile der t-Verteilung liest man ab, dass $t(18, 97.5\%) = 2.101$. Also lautet der Verwerfungsgbereich:

$$VB = \{T \in (-\infty, -2.101] \cup [2.101, \infty)\}.$$

Da die Teststatistik den Wert

$$T = \sqrt{5}\frac{\bar{x}_{10} - \bar{y}_{10}}{s_{pool}} = -2.579$$

annimmt, wird die Nullhypothese verworfen und Giorgio kann eine eindeutige Kaufentscheidung fällen. Er entscheidet sich für die Maschine B, da T negativ ist.

e) Der Wert -2.579 befindet sich zwischen dem 99.5%-Quantil und dem 99%-Quantil der t-Verteilung mit 18 Freiheitsgraden. Da unser Test hier zweiseitig ist, folgt daraus, dass das gesuchte Niveau im Intervall $[1\%, 2\%]$ liegt. Es liegt ziemlich nahe bei 2%.

4. (12 Punkte)

a) (1 Punkt) X_n is binomialverteilt mit Parametern n und p.

b) (3 Punkte) Die Schätzung für p ist

$$\hat{p} = \frac{219}{365} = 0.6 \quad \text{(Punkt 1).}$$

Laut Normalapproximation ist das Vertrauensintervall gegeben durch

$$\frac{x}{n} \pm \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{x}{n}\left(1 - \frac{x}{n}\right)\frac{1}{n}},$$

wobei $\alpha = 0.01, x = 219, n = 365$ (Punkt 2), also durch

$$0.6 \pm \Phi^{-1}(0.995)\sqrt{0.6 \times 0.4 \times \frac{1}{365}}.$$

Mit dem Wert $\Phi^{-1}(0.995) = 2.575$ erhält man somit

$$[0.5340, 0.6660]$$

(auf 4. Stelle gerundet) als Vertrauensintervall für p (Punkt 3).

c) (4 Punkte) Zur Belegung der Aussage wählt man als Nullhypothese

$$H_0 : p = 0.4$$

und als Alternativhypothese die zu belegende Aussage, also

$$H_A : p < 0.4 \quad \text{(Punkt 1).}$$

Der Verwerfungsbereich ist $\{x : x \leq c\}$, wobei $c \in \mathbb{N}_0$ so gross wie möglich mit $P_{0.4}[X_{100} \leq c] \leq 0.05$ ist (Punkt 2). Zur Berechnung von $P_{0.4}[X_{100} \leq c]$ verwendet man die Normalapproximation:

$$\begin{aligned} P_{0.4}[X_{100} \leq c] &= P_{0.4}\left[\frac{X_{100} - 40}{\sqrt{0.4 \times 0.6 \times 100}} \leq \frac{c - 40}{\sqrt{0.4 \times 0.6 \times 100}}\right] \\ &\approx \Phi\left(\frac{c - 40}{\sqrt{0.4 \times 0.6 \times 100}}\right) \quad \text{(Punkt 3).} \end{aligned}$$

Somit benötigen wir

$$\Phi\left(\frac{c - 40}{\sqrt{0.4 \times 0.6 \times 100}}\right) \leq 0.05,$$

beziehungsweise

$$1 - \Phi\left(\frac{c - 40}{\sqrt{0.4 \times 0.6 \times 100}}\right) = \Phi\left(\frac{40 - c}{\sqrt{0.4 \times 0.6 \times 100}}\right) \geq 0.95,$$

oder

$$c \leq 40 - \Phi^{-1}(0.95)\sqrt{0.4 \times 0.6 \times 100} \overset{\Phi^{-1}(0.95)\approx 1.645}{\approx} 31.94.$$

Somit ist der Verwerfungsbereich

$$\{x : x \leq 31\} \quad \text{(Punkt 4).}$$

d) (4 Punkte) Aus der Beobachtung folgt, dass die Aussage bzw. die gewählte Alternativhypothese, signifikant ist (Punkt 1). Der P-Wert ist gegeben durch $P_{0.4}[X_{100} \leq 28]$ (Punkt 2). Durch Normalapproximation erhält man

$$\begin{aligned} P_{0.4}[X_{100} \leq 28] &= P_{0.4}\left[\frac{X_{100} - 40}{\sqrt{0.4 \times 0.6 \times 100}} \leq \frac{-12}{\sqrt{0.4 \times 0.6 \times 100}}\right] \\ &\approx \Phi\left(\frac{-12}{\sqrt{0.6 \times 0.4 \times 100}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{12}{\sqrt{0.6 \times 0.4 \times 100}}\right) \quad \text{(Punkt 3).} \end{aligned}$$

Mit $\frac{12}{\sqrt{0.6 \times 0.4 \times 100}} \approx 2.45$ und $\Phi(2.45) \approx 0.99286$ erhält man also den P-Wert

$$0.00714 \quad \text{(Punkt 4).}$$