Stochastik - Musterlösung (BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

1. (15 Punkte)

a) **Nullhypothese:** Der Bremsweg mit dem neuen Sommerreifen ist gleich lang wie derjenige mit den alten Sommerreifen.
Alternativhypothese: Der Bremsweg mit den neuen Sommerreifen ist kürzer als derjenige mit den alten Sommerreifen.

b)

$$H_0: \quad \mu_X = \mu_Y$$
$$H_A: \quad \mu_X > \mu_Y.$$

c) ungepaart

d) einseitig

e) Für $T := \frac{\bar{X}_{10}-\bar{Y}_{10}}{s_{pool}}\sqrt{5}$ gilt $VB := \{T \in [2.552, \infty)\}$.

f) $T = \frac{1.5}{\sqrt{1.52}}\sqrt{5} = 2.72 \in$ VB, daher wird die Nullhypothese verworfen.

g) Kleiner, weil die Nullhypothese zum Niveau 1% klar abgelehnt wird.

h) Man sollte den Vorzeichen- oder den Wilcoxon-Test durchführen.

2. (15 Punkte)

a)

$$\begin{aligned} P[M \le t] &= P[\min(T_1, \ldots, T_n) \le t] \\ &= 1 - P[\min(T_1, \ldots, T_n) > t] \\ &= 1 - (P[T_1 > t])^n \\ &= 1 - e^{-n\lambda t}. \end{aligned}$$

Somit ist die Dichte $f_M(t) = n\lambda e^{-n\lambda t}, t \ge 0$.

Bitte wenden!

b) $M \sim \text{Exp}(n\lambda) \Longrightarrow E[M] = \frac{1}{n\lambda}$.

c)

$$\begin{aligned} E[e^{\alpha M}] &= \int_0^\infty e^{\alpha t} n\lambda e^{-n\lambda t} dt \\ &= n\lambda \int_0^\infty e^{(\alpha - n\lambda)t} dt \\ &= \frac{n\lambda}{n\lambda - \alpha}. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} P[S > 60] &= 2.275\% \\ P[\frac{S - n/\lambda}{\sqrt{n}/\lambda} > \frac{60 - 100/\lambda}{10/\lambda}] &= 2.275\% \\ \overset{\text{ZGS}}{\Longrightarrow} 60 - 100/\lambda &= 20/\lambda \\ \Longrightarrow \lambda &= 2. \end{aligned}$$

e) Sei $k = 3.83$. Dann ist $P[\widetilde{M} \le t] = 1 - e^{-(n-2)\lambda t} e^{-2\lambda t/k} = 1 - e^{-\lambda t(n-2+2/k)}$.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \widetilde{M} &\sim \text{Exp}((n - 2 + 2/k)\lambda). \\ \frac{E[\widetilde{M}]}{E[M]} - 1 &= \frac{n}{n - 2 + 2/k} - 1 = 1.5\%. \end{aligned}$$

3. (15 Punkte)

a) X bedingt auf $Y = j$ ist binomialverteilt mit Parameter j und $1/2$. Daher haben wir $P[X = k|Y = j] = \binom{j}{k}\frac{1}{2^j}$ für $k \in \{0, \ldots, j\}$ und $P[X = k|Y = j] = 0$ für $k > j$.

b) Aus dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit folgt

$$\begin{aligned} P[X = 4] &= P[X = 4|Y = 4]P[Y = 4] + P[X = 4|Y = 5]P[Y = 5] \\ &\quad + P[X = 4|Y = 6]P[Y = 6] \\ &= \binom{4}{4}\frac{1}{2^4}\frac{1}{6} + \binom{5}{4}\frac{1}{2^5}\frac{1}{6} + \binom{6}{4}\frac{1}{2^6}\frac{1}{6} \\ &= \frac{29}{384} = 0.07552\ldots \end{aligned}$$

c) Wegen des Satzes von Bayes gilt

$$P[Y = 4|X = 4] = \frac{P[X = 4|Y = 4]P[Y = 4]}{P[X = 4]} = \frac{4}{29} = 0.13793\ldots$$

Siehe nächstes Blatt!

d) Y nimmt nur die Werte 4, 5 und 6 mit positiver Wahrscheinlichkeit an unter der Bedingung $X = 4$. Analog zur vorherigen Teilaufgabe kann man berechnen

$$P[Y=5|X=4] = \frac{P[X=4|Y=5]P[Y=5]}{P[X=4]} = \frac{10}{29} = 0.34482\ldots$$
$$P[Y=6|X=4] = \frac{P[X=4|Y=6]P[Y=6]}{P[X=4]} = \frac{15}{29} = 0.51724\ldots$$

Daher ist die auf $X = 4$ bedingte Wahrscheinlichkeit für $Y = 6$ am grössten.

e) Mit Hilfe des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit berechnet man

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{k=1}^{6} kP[X=k] = \sum_{k=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} kP[X=k|Y=j]P[Y=j] \\
&= \sum_{k=1}^{6}\sum_{j=k}^{6} k\binom{j}{k}\frac{1}{2^j}\frac{1}{6} = \sum_{j=1}^{6}\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{j}\frac{k}{2^j}\binom{j}{k} \\
&= \sum_{j=1}^{6}\frac{j}{12} = \frac{7}{4} = 1.75
\end{aligned}$$

f) Für jedes $j \in \{1, \ldots, 6\}$ gilt $P[Y = j] = 1/6$. Von Aufgabe b) wissen wir, dass $P[X = 4] < 1/12$ und vermuten daher, dass auch $P[X = 5] < 1/12$ und $P[X = 6] < 1/12$ gilt, weil tendenziell das Ereignis $\{X = j\}$ für grössere j noch unwahrscheinlicher ist. Wegen der Versuchsanordnung und Aufgabe e) mutmassen wir, dass $\{X = 1\}$ und $\{X = 2\}$ relativ wahrscheinlich sind (Wahrscheinlichkeit jeweils $> 1/6$). Also scheint es sinnvoll, zunaechst $P[X = 3]$ und $P[X = 0]$ zu berechnen und zu schauen, ob eine der beiden Wahrscheinlichkeiten $1/6$ ergibt:

$$\begin{aligned}
P[X=3] &= P[X=3|Y=3]P[Y=3] + P[X=3|Y=4]P[Y=4] \\
&\quad + P[X=3|Y=5]P[Y=5] + P[X=3|Y=6]P[Y=6] \\
&= \binom{3}{3}\frac{1}{2^3}\frac{1}{6} + \binom{4}{3}\frac{1}{2^4}\frac{1}{6} + \binom{5}{3}\frac{1}{2^5}\frac{1}{6} + \binom{6}{3}\frac{1}{2^6}\frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Also ist $P[Y = j] = P[X = j]$ für $j = 3$ erfüllt.
Bemerkung: Dies gilt nur für $j = 3$, denn analoge Berechnungen führen zu

$$P[X=j] = \begin{cases} 21/128 & \text{falls } j=0, \\ 5/16 & \text{falls } j=1, \\ 33/128 & \text{falls } j=2, \\ 1/6 & \text{falls } j=3, \\ 29/384 & \text{falls } j=4, \\ 1/48 & \text{falls } j=5, \\ 1/384 & \text{falls } j=6. \end{cases}$$