D–MAVT, Neur. Syst. Comp.

Prüfung Stochastik

401-0603-00L

Nachname
XX XX

Vorname
XX XX

Legi-Nr.
XX-XXX-XXX

Prüfungs-Nr.
044

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Ein Elektriker bekommt zwei Schachteln. In der ersten Schachtel befinden sich 3 defekte und 12 intakte Glühbirnen. In der zweiten Schachtel sind 10 defekte und 20 intakte Widerstände. Der Elektriker wählt zufällig (und unabhängig voneinander) eine Glühbirne und einen Widerstand und setzt sie in einen elektrischen Stromkreis ein. Damit die Glühbirne beim Schliessen des Stromkreises leuchtet, müssen sowohl die Glühbirne als auch der Widerstand intakt sein.
Wir definieren die folgenden Ereignisse:

$$G = \text{Die gezogene Glühbirne ist defekt.}$$
$$W_1 = \text{Der erste eingesetzte Widerstand ist defekt.}$$

1.A1 [2 Punkte] Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Glühbirne beim ersten Schliessen des Stromkreises nicht leuchtet.

1.A2 [2 Punkte] Mit welcher bedingten Wahrscheinlichkeit ist die eingesetzte Glühbirne defekt, gegeben dass die Glühbirne beim ersten Schliessen nicht leuchtet?

1.A3 [4 Punkte] Wir nehmen nun an, dass die Glühbirne nach dem ersten Schliessen des Stromkreises nicht geleuchtet hat. Deswegen ersetzen wir den ersten Widerstand durch einen zweiten, der zufällig aus den verbliebenen Widerständen ausgewählt wurde, und definieren das folgende Ereignis:

$$W_2 = \text{Der zweite eingesetzte Widerstand ist defekt.}$$

Beim zweiten Schliessen des Stromkreises stellen wir fest, dass die Glühbirne immer noch nicht leuchtet. Beschreiben Sie dieses Ereignis mit Hilfe der Ereignisse G, W_1 und W_2 und berechnen Sie dessen Wahrscheinlichkeit.

1.A4 [2 Punkte] Wie gross ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die eingesetzte Glühbirne defekt ist, gegeben dass die Glühbirne beim ersten und zweiten Schliessen des Stromkreises nicht geleuchtet hat?

Aufgabe 2

2.MC1 [1 Punkt] Seien A und B Ereignisse mit $\mathbb{P}[A \mid B] = 0.1$, $\mathbb{P}[A \mid B^c] = 0.05$ und $\mathbb{P}[B] = 0.3$. Wie gross ist $\mathbb{P}[A]$?

(A) $\mathbb{P}[A] = 0.045$

(B) $\mathbb{P}[A] = 0.055$

(C) $\mathbb{P}[A] = 0.065$

2.MC2 [1 Punkt] Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Wertebereich $\{0, 1, 2, \ldots\}$ und Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p(k) = \begin{cases} 0.1, & \text{für } k = 0 \\ 0.4, & \text{für } k = 1 \\ 0.3, & \text{für } k = 2 \\ 0.2, & \text{für } k = 3 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Erwartungswert von X ist:

(A) $\mathbb{E}[X] = 1.3$

(B) $\mathbb{E}[X] = 1.6$

(C) $\mathbb{E}[X] = 2.5$

2.MC3 [1 Punkt] Sei U eine auf dem Intervall $[0, 1]$ uniform verteilte Zufallsvariable und $X = -\log(1 - U)$. Dann gilt:

(A) X ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 2$.

(B) X ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$.

(C) X ist standard normalverteilt.

2.MC4 [1 Punkt] Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert 2 und Varianz 4. Desweiteren sei $Y = 3 - 2X$. Wie gross ist ungefähr $\mathbb{P}[X > 2 \mid Y < 1]$?

(i) $\mathbb{P}[X > 2 \mid Y < 1] = 0.72$

(ii) $\mathbb{P}[X > 2 \mid Y < 1] = 0.95$

(iii) $\mathbb{P}[X > 2 \mid Y < 1] = 0.42$

2.MC5 [1 Punkt] Seien X und Y zwei unabhängige standard normalverteilte Zufallsvariablen. Wie gross ist die Kovarianz der Zufalssvariablen

$$Z = 1 + X + XY^2 \text{ und } W = 1 + X?$$

(A) $\text{Cov}(Z, W) = 2$

(B) $\text{Cov}(Z, W) = 3$

(C) $\mathrm{Cov}(Z, W) = 1$

2.MC6 [1 Punkt] Wir beobachten die folgenden geordneten Daten:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_{(i)}$	65.32	65.45	65.48	65.53	65.59	65.64	65.72	65.77	65.81	65.93

Wie gross ist das empirische 90%-Quantil $q_{0.9}$?

(A) $q_{0.9} = 65.81$

(B) $q_{0.9} = 65.87$

(C) $q_{0.9} = 65.79$

2.MC7 [1 Punkt] Betrachten Sie die Zufallsvariable $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, wobei $X_1, \ldots, X_n$ Bernoulli verteilte Zufallsvariablen sind mit Erfolgswahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[X_i = 1] = p$ für $i = 1, \ldots, n$. Welche Aussage ist richtig?

(A) $\mathbb{P}[X = 1] = np(1-p)^{n-1}$

(B) $\mathbb{E}[X] = np$

(C) $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$

2.MC8 [1 Punkt] Wir betrachten die empirische Korrelation von (x_i, y_i) für $i = 1, \ldots, 10$. Dann gilt:

(A) Wenn die empirische Korrelation gleich minus eins ist, dann liegen die Daten auf einer Geraden mit positiver Steigung.

(B) Wenn die empirische Korrelation gleich null ist, dann gibt es keine Abhängigkeit zwischen den Datenpunkten x_i und y_i.

(C) Das Vorzeichen der empirischen Korrelation bestimmt die Richtung des linearen Zusammenhangs.

2.MC9 [1 Punkt] Bei einem statistischen Test hängt der p-Wert

(A) von der Stichprobe ab.

(B) vom Fehler 1. Art ab.

(C) von der Stichprobe und vom Fehler 1. Art ab.

2.MC10 [1 Punkt] Welche Aussage ist korrekt?

(A) Je grösser das Signifikanzniveau α ist, desto kleiner ist der Verwerfungsbereich.

(B) Der Wilcoxon-Test benötigt weniger Annahmen als der t-Test.

(C) Bei ungepaarten Stichproben stimmt die Stichprobengrösse nie überein.

Aufgabe 3

Die Zufallsvariablen X und Y haben die gemeinsame Dichtefunktion

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\frac{y}{x^3} & 0 < x \leq 1,\, 0 < y \leq x^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

3.A1 [**1 Punkt**] Bestimmen Sie den Parameter c.

3.A2 [**2 Punkte**] Bestimmen Sie die Randdichte von X.

3.A3 [**1 Punkt**] Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[X \leq 1/2]$.

3.A4 [**2 Punkte**] Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariable $Z = X/Y$.

3.A5 [**2 Punkte**] Bestimmen Sie den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}[Y \mid X = 1/2]$.

3.A6 [**2 Punkte**] Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig?

Aufgabe 4

An einer Fussball-Schülermeisterschaft wurden in 350 Spielen insgesamt 839 Tore geschossen. Die während eines Spieles erzielten Tore pro Mannschaft waren wie folgt verteilt.

Tore pro Mannschaft und Spiel	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Tot.
Anzahl Vorkommnisse	224	233	154	70	10	8	0	0	1	839

Die Tabelle ist so zu verstehen, dass es beispielsweise 154 mal vorgekommen ist, dass eine Mannschaft 2 Tore in einem Spiel erzielt hat.
Nehmen Sie an, dass die Anzahl erzielter Tore einer Mannschaft pro Spiel unabhängig ist von der Anzahl erzielter Tore ihrer Gegner und Poisson-verteilt ist mit Parameter λ.

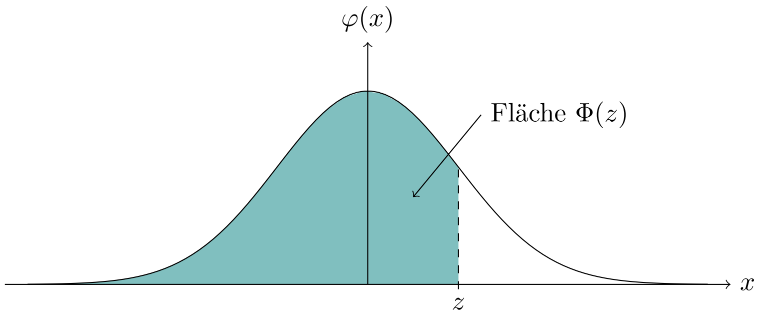
4.A1 [3 Punkte] Geben Sie unter der obigen Annahme eine Schätzung $\widehat{\lambda}$ für den Parameter λ an.

4.A2 [3 Punkte] Nehmen Sie an, dass $\lambda = \widehat{\lambda}$. Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass während eines Spiels insgesamt mindestens 3 Tore geschossen werden?

4.A3 [4 Punkte] Geben Sie ein approximatives zweiseitiges 95%-Vertrauensintervall für den Parameter λ an. Das Vertrauensintervall soll dabei bis auf 3 Stellen nach dem Komma angegeben werden.

Tabelle der Standardnormalverteilung

$$\Phi(z) = \mathbb{P}\left(Z \leq z\right), \ Z \sim \mathcal{N}\left(0, 1\right)$$



Lesebeispiel Tabelle: $\mathbb{P}\left(Z \leq 1.96\right) = 0.975$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998