Stochastik - Musterlösung
(BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

1. a) 2. b) 3. (Erklärung: $\mu_X = 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 2$ und $\mu_Y = -2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} = \frac{11}{8}$) c) 2. d) 1. e) 1. f) 1. g) 3. h) 2. i) 2. j) 1.

2. Die Ereignisse werden bezeichnet mit:

S_0 ... eine "0" wird gesendet	S_1 ... eine "1" wird gesendet
A_0 ... A empfängt eine "0"	A_1 ... A empfängt eine "1"
B_0 ... B empfängt eine "0"	B_1 ... B empfängt eine "1"
F_A ... A macht Fehler	F_B ... B macht Fehler

Aus der Angabe ergibt sich:

$P(S_0) = 0.4 \quad (\Rightarrow P(S_1) = 0.6)$.

$P(A_0|S_0) = 0.95 \quad (\Rightarrow P(F_A|S_0) = P(A_1|S_0) = 0.05)$.

$P(A_1|S_1) = 0.9$ $(\Rightarrow P(F_A|S_1) = P(A_0|S_1) = 0.1)$.

$P(B_0|S_0) = 0.9$ $(\Rightarrow P(F_B|S_0) = P(B_1|S_0) = 0.1)$.

$P(B_1|S_1) = 0.85$ $(\Rightarrow P(F_B|S_1) = P(B_0|S_1) = 0.15)$.

a) $P(F_A) = P(F_A|S_0)P(S_0) + P(F_A|S_1)P(S_1) = 0.05 \cdot 0.4 + 0.1 \cdot 0.6 = 0.08$.
$P(F_B) = P(F_B|S_0)P(S_0) + P(F_B|S_1)P(S_1) = 0.1 \cdot 0.4 + 0.15 \cdot 0.6 = 0.13$.

b) $P(F_A^c \cap F_B^c) = P(F_A^c)P(F_B^c) = (1 - P(F_A))(1 - P(F_B)) = (1 - 0.08) \cdot (1 - 0.13) = 0.8004$.

c) Zuerst berechnet man $P(B_1) = P(B_1|S_0)P(S_0) + P(B_1|S_1)P(S_1) = 0.1 \cdot 0.4 + 0.85 \cdot 0.6 = 0.55$.

Nach der Formel von Bayes gilt dann
$P(S_0|B_1) = \frac{P(B_1|S_0)P(S_0)}{P(B_1)} = \frac{0.1 \cdot 0.4}{0.55} = 0.073$.

d) $P(\text{kein Fehler}) = P(F_A^c)^{10} = (1-p)^{10} > 0.9$, darauf ergibt sich $1 - p > 0.9^{\frac{1}{10}}$, und weiters $p < 1 - 0.9^{\frac{1}{10}} = 0.0105$, p muss also kleiner als 0.0105 sein.

3. **a)**

$$P(T > t) = 1 - P(T \le t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

b) Wegen der Unabhängigkeit von T_1 and T_2 und der Teilaufgabe (a) erhalten wir

$$\begin{aligned} P(S > t) = P(\min(T_1, T_2) > t) &= P(T_1 > t, T_2 > t) = P(T_1 > t)P(T_2 > t) \\ &= e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}. \end{aligned}$$

c) $P(S \le t) = 1 - P(S > t) = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$, also ist S exponentialverteilt mit Parameter $\lambda_1 + \lambda_2$, weshalb die Dichte gegeben ist durch $(\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$, man erhält sie auch durch Ableiten der Verteilungsfunktion $F_S(t) = P(S \le t)$:

$$f_S(t) = \frac{d}{dt}F_S(t) = \frac{d}{dt}\left(1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\right) = (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}.$$

d) Wir wissen für alle $i = 1, \ldots, n$, dass

$$EX_i = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \Rightarrow \quad EX_i^2 = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Das k-te Stichprobenmoment von Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ ist $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k$. Wir werden zwei Momentenschätzer für λ konstruieren, in dem wir das erste und zweite Moment verwenden werden. Deshalb folgt

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i}, \\ \hat{\lambda}_2 &= \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2}}. \end{aligned}$$

Beide Schätzer sind nicht erwartungstreu, da wir Reziprokal nehmen und/oder Wurzel ziehen.

4. **a)** Die Stichprobe ist ungepaart. Die Sicherheitsgurte werden in verschiedenen Fabriken hergestellt und von einem unabhängigen Labor nach gleichen Kriterien geprüft.

b) $H_0 : \mu_A = \mu_B$ $H_A : \mu_A \neq \mu_B$
Der Test ist zweiseitig.

c) 1. Für zwei unabhängige Stichproben (ungepaart) die normalverteilt sind mit gleicher jedoch unbekannter Varianz, betrachten wir den Zwei-Stichproben t-Test. Die Teststatistik lautet:

$$T = \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \frac{|\overline{x}_m - \overline{y}_n|}{s_{pool}}.$$

Siehe nächstes Blatt!

2. Für die Teststatistik gilt

$$T \;\sim\; \text{t-verteilt mit } m+n-2 \text{ Freiheitsgraden.}$$

Somit erhalten wir für den Verwerfungsbereich zum Niveau α

$$\begin{aligned} VB &= \Big(-\infty, -t^{-1}(m+n-2, 1-\frac{\alpha}{2})\Big) \cup \Big(t^{-1}(m+n-2, 1-\frac{\alpha}{2}), \infty\Big) \\ &= \big(-\infty, -t^{-1}(11, 0.975)\big) \cup \big(t^{-1}(11, 0.975), \infty\big) \\ &= (-\infty, -2.201) \cup (2.201, \infty) \end{aligned}$$

3. $T \in VB$?

$$T = 1.63$$

Somit liegt T nicht im VB und die Nullhypothese wird nicht verworfen.

(Man kann auch den P-Wert betrachten. Der Test ist zweiseitig und das Signifikanzniveau wurde bei 5% gewählt, also ist die Nullhypothese plausibel falls der P-Wert grösser ist als 0.025. Aus der t-Tabelle sehen wir dass für $T = 1.63$ der P-Wert sicher grösser als die gefordeten 0.025 ist.)