Stochastik
(BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

Schreiben Sie für Aufgabe 2-4 stets alle Zwischenschritte und -rechnungen sowie Begründungen auf. Aufgabe 1 ist eine Multiple Choice Aufgabe (keine Begründungen notwendig).

Die für die Aufgaben benötigten Tabellen (Normalverteilung, Quantile der t-Verteilung) wurden mit der Prüfung ausgeteilt.

1. (10 Punkte)

Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig. Es gibt pro richtig beantwortete Frage 1 Punkt und pro falsche Antwort 1/2 Punkt Abzug. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte. **Bitte benützen Sie das beiliegende Antwortblatt.**

a) Sei die Funktion f explizit gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} cx^3, & 0 \leq x \leq 2 \\ c, & -2 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Für welchen Wert c stellt f eine Dichtefunktion dar?

1. $\frac{1}{2}$.
2. $\frac{1}{6}$.
3. 1.

b) Die diskreten Zufallsvariablen X und Y sind durch folgende gemeinsamen Verteilungen gegeben

$$\begin{aligned} &P(X=1, Y=-2) = \frac{1}{8}, \qquad P(X=1, Y=1) = \frac{1}{4}, \qquad P(X=1, Y=4) = \frac{1}{8}, \\ &P(X=3, Y=-2) = \frac{1}{8}, \qquad P(X=3, Y=1) = \frac{1}{8}, \qquad P(X=3, Y=4) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Wie gross sind die Erwartungswerte $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(Y)$?

1. $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}$ und $\mathbb{E}(Y) = 2$.

Bitte wenden!

2. $\mathbb{E}(X) = 1$ und $\mathbb{E}(Y) = \frac{5}{2}$.
3. $\mathbb{E}(X) = 2$ und $\mathbb{E}(Y) = \frac{11}{8}$.

c) Ist X eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern n und p, dann konvergiert die Verteilungsfunktion $F_n(z)$ der standardisierten Zufallsvariablen

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

für $n \to \infty$ gegen die Verteilungsfunktion der

1. Exponentialverteilung.
2. Standardnormalverteilung.
3. Poissonverteilung.

d) Für eine nichtlineare Funktion g gilt im Allgemeinen

1. $g(\mathbb{E}[X]) \neq \mathbb{E}[g(X)]$.
2. $g(\mathbb{E}[X]) \geq \mathbb{E}[g(X)]$.
3. $g(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[g(X)]$.

e) Seien X und Y Zufallsvariablen mit Korrelation $Corr(X, Y) = -1$, Varianz $Var(X) = 1$ und Standardabweichung $\sqrt{Var(Y)} = 2$. Wie gross ist dann $Var(X + Y)$?

1. 1.
2. 3.
3. 5.

f) Seien $X_1, \cdots, X_n$ unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 und sei $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Dann ist für σ^2 der Schätzer

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

1. erwartungstreu.
2. nicht erwartungstreu.
3. Es kann keine Aussage gemacht werden.

g) Beim Testen einer Nullhypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ wird bei gegebener Standardabweichung σ bei zweiseitiger Alternative $H_A : \mu \neq \mu_0$ die Nullhypothese H_0 abgelehnt, falls

1. $\mid \bar{X}_n - \mu_0 \mid < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$,
2. $\bar{X}_n - \mu_0 > \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$,
3. $\mid \bar{X}_n - \mu_0 \mid > \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$,
   wobei $\Phi(\cdot)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

h) Welche Aussage gilt für einen Test zum Niveau α?

Siehe nächstes Blatt!

1. Je grösser das Niveau α, desto eher behalten wir die Nullhypothese.
2. Je kleiner das Niveau α, desto grösser die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art.
3. α ist die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art.

i) Seien $X_1, \cdots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit der Dichtefunktion

$$f_\vartheta(x) = \begin{cases} (\vartheta - 1)x^{-\vartheta}, & x \geq 1 \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\vartheta \in (0, \infty)$ ein unbekannter Parameter ist. Der Maximum Likelihoodschätzer für ϑ lautet

1. $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log(X_i)}$.
2. $1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log(X_i)}$.
3. $\frac{n}{\vartheta - 1} - \sum_{i=1}^{n} \log(X_i)$.

j) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

1. Fehler 2. Art tritt auf, wenn die Nullhypothese H_0 akzeptiert wird, obwohl die Alternativhypothese H_A gilt.
2. Fehler 2. Art titt auf, wenn die Nullhypothese H_0 abgelehnt wird, obwohl sie wahr ist.
3. Weder 1. noch 2. gilt.

Bitte wenden!

2. (9 Punkte) Wir betrachten ein binäres Nachrichtensystem bestehend aus einem Sender S und zwei Empfängern A und B. Empfänger A ist 50 km vom Sender entfernt, Empfänger B 100 km. Übertragen werden die Signale "0" und "1". Die "0" wird mit einer Häufigkeit von 40% gesendet. Eine "0" wird in 95% aller Fälle von A richtig erkannt, in 90% aller Fälle von B. Eine "1" wird in 90% aller Fälle von A richtig erkannt, in 85% aller Fälle von B.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein gesendetes Signal von A nicht richtig erkannt wird, bzw. von B nicht richtig erkannt wird?

b) Seien die Ereignisse "A macht Fehler" und "B macht Fehler" unabhängig. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein gesendetes Signal sowohl von A als auch von B richtig erkannt?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine "0" gesendet wurde, wenn B eine "1" empfängt?

Nehmen wir nun an, dass A mit Wahrscheinlichkeit p ein Signal nicht richtig erkennt und dass das Auftreten von Fehlern bei der Übertragung mehrerer Signale unabhängig voneinander passiert.

d) Wie groß darf p höchstens sein, damit bei der Übertragung von 10 Signalen die Wahrscheinlichkeit, dass A alle 10 Signale richtig erkennt über 90% liegt?

Siehe nächstes Blatt!

3. (8 Punkte)

a) Sei die Zufallsvariable T exponential verteilt mit Parameter λ. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(T > t)$.

b) Seien T_1 and T_2 zwei unabhängige exponential verteilten Zufallsvariablen mit Parameter λ_1 und λ_2. Falls $S = \min(T_1, T_2)$, berechnen Sie $P(S > t)$.

c) Wie ist S verteilt? Geben Sie die Dichte von S an.

d) Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig und exponential verteilt mit Parameter λ. Geben Sie zwei verschiedene Momentenschätzer für λ an. Sind diese Schätzer erwartungstreu?

Bitte wenden!

4. (8 Punkte) Eine Firma produziert an zwei verschiedenen Standorten (A und B) Sicherheitsgurte für die Automobilindustrie. Es soll überprüft werden, ob die in den zwei verschiedenen Fabriken produzierten Sicherheitsgurte die gleiche Reissfestigkeit aufweisen. Dafür entnehmen wir jeweils eine Stichprobe, diese werden dann an ein unabhängiges Labor zur Auswertung geschickt. Die Ergebnisse sind in folgender Tabelle zusammengefasst (in daN, i.e. Dekanewton):

x_i, Fabrik A:	2194	2203	2207	2186	2186	2204	2195	2185
y_i, Fabrik B:	2192	2201	2185	2173	2179			

Man möchte einen Test auf dem 5%-Niveau durchführen.

a) Ist die Stichprobe gepaart oder ungepaart?

b) Formulieren Sie die Null- und Alternativhypothese. Ist der Test ein- oder zweiseitig?

c) Nehmen Sie an, dass die Daten für Fabrik A, $\mathcal{N}(\mu_A, \sigma^2)$- und für Fabrik B, $\mathcal{N}(\mu_B, \sigma^2)$-verteilt sind mit unbekannten μ_A, μ_B und σ.

1. Welcher Test ist angebracht?
2. Führen Sie diesen Test durch.
3. Wie wird der Test entschieden?

Es stehen folgende Werte zur Verfügung:
Das arithmetische Mittel und die Stichprobenvarianz der Werte für Fabrik A: $\overline{x} = 2195$, $s_x^2 = 78.9$
Das arithmetische Mittel und die Stichprobenvarianz der Werte für Fabrik B: $\overline{y} = 2186$, $s_y^2 = 120$
Die gepoolte Schätzung der gemeinsamen Varianz: $s_{pool}^2 = 93.8$