Stochastik
(BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

Schreiben Sie für Aufgabe 2-4 stets alle Zwischenschritte und -rechnungen sowie Begründungen auf. Aufgabe 1 ist eine Multiple Choice Aufgabe (keine Begründungen notwendig).

Die für die Aufgaben benötigten Tabellen (Normalverteilung, Quantile der t-Verteilung, Vertrauensintervall für die Binomialverteilung, Verwerfungsbereiche für den Wilcoxon-Test) wurden mit der Prüfung ausgeteilt.

1. (10 Punkte)

Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig. Es gibt pro richtig beantwortete Frage 1 Punkt und pro falsche Antwort 1/2 Punkt Abzug. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte. **Bitte benützen Sie das beiliegende Antwortblatt.**

a) Wie oft muss man einen fairen Würfel im Mittel werfen bis man zum ersten Mal eine 6 erhält?

1. 6.
2. 6^6.
3. 6!.

b) Von einem Labortest für eine bestimmte Krankheit kennt man folgende Statistik: Sei A das Ereignis, dass die getestete Person die Krankheit hat und B das Ereignis, dass der Test positiv ist. Man weiss, dass $\mathbb{P}(B|A) = 0.99$ und $\mathbb{P}(B|A^c) = 0.005$. Ausserdem beträgt der Anteil der Bevölkerung, der tatsächlich die Krankheit hat, 0.1%. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person die Krankheit tatsächlich hat wenn der Test positiv ist?

1. $\mathbb{P}(A|B) = 0.065$.
2. $\mathbb{P}(A|B) = 0.165$.
3. $\mathbb{P}(A|B) = 0.560$.

Bitte wenden!

c) Die Anzahl von Anrufen in einem Callcenter, die in einem Zeitraum von 10 Minuten eingehen, ist Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = 2$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem fix vorgegebenen Zeitraum von 10 Minuten niemand anruft?

1. $\frac{1}{20}$.
2. e^{-20}.
3. e^{-2}.

d) Sedia Markt hat 1000 Mixer von Fabrik 1 gekauft, von denen 100 defekt sind, und 2000 Mixer von Fabrik 2 gekauft, von denen 150 defekt sind. Klara hat gestern bei Sedia Markt einen defekten Mixer gekauft. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser in Fabrik 1 produziert wurde?

1. $\frac{2}{5}$.
2. $\frac{1}{30}$.
3. $\frac{1}{12}$.

e) Der Zentrale Grenzwertsatz besagt, dass die Summe von n gleichverteilten Zufallsvariablen mit Verteilung F, unter bestimmten Voraussetzungen, annähernd normalverteilt ist. Welche der folgenden Bedingungen ist für die Gültigkeit dieser Aussage notwendig?

1. Der Stichprobenumfang n muss gross sein.
2. Die Verteilung F muss symmetrisch sein.
3. Die Verteilung F muss Normal sein.

f) Sei $(x_1, \ldots, x_n)$ die Stichprobe einer Poisson-verteilten Zufallsvariablen X mit Parameter λ. Die Funktion

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

ist

1. ein erwartungstreuer Schätzer für λ.
2. ein Schätzer für λ, aber nicht erwartungstreu.
3. kein Schätzer für λ.

g) Von 100 befragten Wählern geben 55 an Herrn Müller unterstützt zu haben. Wie lautet das 95%-Vertrauensintervall für Herrn Müllers Stimmenanteil?

1. $[0.54, 0.56]$.
2. $[0.47, 0.63]$.
3. $[0.45, 0.65]$.

Siehe nächstes Blatt!

h) Der Hersteller von einem Medikament gegen eine Allergie behauptet, dass dieses in wenigstens 90% der Fälle mindestens 8 Stunden lang wirkt. Bei einer Stichprobe von 200 Personen, die die Allergie haben, wurde bei 160 Personen diese Wirkung erzielt. Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass das Medikament mindestens 8 Stunden wirkt und α das Signifikanzniveau.
Welcher Test ist geeignet?

1. $H_0 : p = 0.9$
   $H_A : p \neq 0.9$
   Die Behauptung ist nicht angebracht, wenn $160 < 180 - z_{1-\alpha}\sqrt{18}$.
2. $H_0 : p = 0.9$
   $H_A : p < 0.9$
   Die Behauptung ist nicht angebracht, wenn $160 < 180 - z_{1-\alpha}\sqrt{18}$.
3. $H_0 : p = 0.9$
   $H_A : p < 0.9$
   Die Behauptung ist nicht angebracht, wenn $160 < 180 - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{18}$.

i) Es ist bekannt, dass die rechte Hand von Rechtshändern normalerweise stärker ist als die linke. Bei Linkshändern ist die linke Hand allerdings nicht immer stärker als die rechte, da vieles für Rechtshänder ausgerichtet ist und Linkshänder sich deshalb anpassen müssen. Um das zu testen, wird die Muskelkraft beider Hände von 15 linkshändigen Männern gemessen und die Differenz (links–rechts) berechnet. Die Alternativ–Hypothese lautet: die linke Hand ist stärker.
Das ist

1. ein ein–seitiger gepaarter Stichprobentest.
2. ein ein–seitiger ungepaarter Stichprobentest.
3. ein zwei–seitiger ungepaarter Stichprobentest.

j) Ein Forscher führt einen Versuch durch, in dem die Alternativ–Hypothese lautet: Mehr als 10% der Leute sind Linkshänder. Die Macht des Tests ist 0.25.
Welche Aussage ist korrekt?

1. Mehr als 10% der Leute sind Linkshänder.
2. Mehr als 25% der Leute sind Linkshänder.
3. Ohne weitere Informationen kann man nicht feststellen, ob mehr als 10% der Leute Linkshänder sind.

Bitte wenden!

2. (7 Punkte) Christian ist unentschlossen, welches der beiden Mädchen (Anna oder Bernadett) er am Freitag auf einen Kaffee im Polysnack einladen soll. Über die beiden Mädchen weiss man, dass sie immer eine der folgenden beiden Antworten geben: "Wahrscheinlich ja" (Zusage) oder "Wahrscheinlich nicht" (Absage). Anna sagt in 60% der Fälle "Wahrscheinlich ja". Da sie aber recht launisch ist, kommt sie im Schnitt jedes dritte Mal doch nicht zur Verabredung nachdem sie zugesagt hat. Bernadett erteilt, im Gegensatz zu Anna gerne eine Abfuhr, in 60% der Fällen sagt sie "Wahrscheinlich nicht". Allerdings ist sie zuverlässiger als Anna und kommt nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% nicht zum Treffen, nachdem sie zugesagt hat. Ausserdem meint Bernadett eine Absage manchmal nicht ernst, und kommt dann mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{p}{10}$ (sei zunächst $p = 2$) doch noch zur Verabredung.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Christian von Anna eine Zusage bekommt und sitzengelassen wird? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Christians Vorhaben Anna zu fragen ein voller Erfolg wird, d.h. er bekommt eine Zusage und Anna erscheint zum Treffen?

b) Nun lädt Christian Bernadett ein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Bernadett nicht zum Treffen erscheint? Wie gross muss p mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit, dass Bernadett nicht zum Treffen erscheint, höchstens bei 50% liegt?

c) In der Vergangenheit hat Christian Bernadett schon einmal zum Kaffee eingeladen, aber sie ist damals nicht erschienen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie damals zugesagt hat?

d) Sei nun die Wahrscheinlichkeit, dass Anna erscheint wenn sie eingeladen wird, $\frac{4}{10}$, und q die Wahrscheinlichkeit, dass Bernadett erscheint wenn sie eingeladen wird. Da Christian das Risiko nicht scheut, entscheidet er sich einfach dafür beide Mädchen einzuladen. Er weiss, dass sich die beiden nicht kennen und daher ihre Entscheidungen unabhängig voneinander treffen. Geben Sie eine Formel in Abhängigkeit von q für die Wahrscheinlichkeit an, dass genau eines der beiden Mädchen erscheint. Wie hoch muss q mindestens sein, damit diese Wahrscheinlichkeit über 50% liegt?

Siehe nächstes Blatt!

3. (8 Punkte) In einer Übungsgruppe gibt es $2n$ Studenten, wobei $n \geq 2$ eine ganze Zahl ist. Die Hälfte der Studenten haben eine Aufgabe gelöst, die sie den anderen Studenten erklären müssen. Dazu werden n Paare gebildet, die wir von 1 bis n durchnummerieren, in denen jeweils ein Student, der die Aufgabe gelöst hat sie einem anderen Studenten der sie nicht gelöst hat, erklärt. Sei T_i $(i = 1, \dots, n)$ die dafür benötigte Zeit (in Minuten) im i-ten Paar. Alle Studenten sind gleich klug und es gibt keine Interaktion zwischen den Paaren. Deshalb nehmen wir an dass $T_1, T_2, ..., T_n$ unabhängig und gleich verteilt sind, und zwar gemäß der Exponentialverteilung mit Parameter $\frac{1}{10}$ (in Minuten).

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der ersten beiden Paare nach spätestens 5 Minuten fertig ist? Gib eine Formel in Abhängigkeit von n und t an für die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines aller n Paare nach spätestens t Minuten fertig ist.

b) Sobald ein Paar fertig ist, dürften eigentlich beide gehen, da der Übungsleiter aber unter einer Zwangsneurose[1] leidet, dürfen die Paare nur in der Reihenfolge ihrer Nummerierung den Raum verlassen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das zweite Paar nach spätestens 5 Minuten gehen darf? Gib eine Formel in Abhängigkeit von n und t an, für die Wahrscheinlichkeit, dass alle n Paare nach spätestens t Minuten gehen dürfen.

c) Sei M die Zeit bis alle gehen dürfen. Für grosses n kann man die Verteilung von M gut durch die sogenannte *Gumbel-Verteilung* (mit den Parametern $\frac{1}{10}$ und $\mu = \log n$) annähern, deren Verteilungsfunktion gegeben ist durch

$$F(z) = \exp\left(-\exp\left(-\left(\frac{z}{10} - \mu\right)\right)\right). \tag{1}$$

Berechne die Dichtefunktion der Gumbel-Verteilung.

d) Der Übungsleiter leitet $k \geq 1$ verschiedene Übungsgruppen gleicher Größe. Sei M_i die Zeit bis alle Studenten in der i-ten Gruppe gehen dürfen $(i = 1, \dots, k)$. Aufgrund der gemessenen Zeiten $m_1, \dots, m_k$ (Realisierungen der Zufallsvariablen $M_1, \dots, M_k$) soll nun der Parameter μ geschätzt werden. Dazu nehmen wir an dass die $M_1, \dots, M_k$ unabhängig und gleichverteilt sind, gemäß der Gumbel-Verteilung aus Gleichung (1) mit unbekanntem Parameter $\mu \in \mathbb{R}$. Leite daraus den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\mu}$ für μ ab.

[1] In etwa so wie der Detektiv Adrian Monk aus der gleichnamigen Fernsehserie.

Bitte wenden!

4. (8 Punkte) Herr und Frau Hürzeler wohnen gemeinsam in einer Villa an der Goldküste. Sie fahren jeden Tag mit dem Taxi zur Arbeit, Herr Hürzeler hat sein Büro am Hönggerberg, Frau Hürzeler arbeitet im Zentrum von Zürich. Sie wollen nun mit einer Sicherheit von 95% herausfinden ob eines der beiden Taxiunternehmen A oder B schneller da ist um sie abzuholen. Dazu bestellen sie an jedem Arbeitstag zeitgleich jeweils ein Taxi und messen die Zeiten von der Bestellung bis zur Ankunft der Taxis vor ihrem Haus. Das machen sie 12 Arbeitstage hintereinander, wobei an ungeraden Tagen Herr Hürzeler mit dem Taxiunternehmen A unterwegs ist, und Frau Hürzeler mit dem Taxiunternehmen B, an geraden Tagen ist es genau umgekehrt.

Dabei haben sie folgende Zeiten (in Minuten) gemessen:

Tag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	0.4	3.8	1.4	4.6	4.9	3.0	6.8	3.7	2.3	2.1	1.0	5.1
B	5.7	6.4	6.2	4.0	6.6	8.9	3.6	4.6	2.1	2.5	4.1	6.1
$A - B$	-5.3	-2.6	-4.8	0.6	-1.7	-5.9	3.2	-0.9	0.2	-0.4	-3.1	-1.0

Frau Hürzeler kennt sich mit Statistik besser aus als ihr Mann, sie nimmt an, dass die Differenzen gleichverteilt und unabhängig sind, die Annahme der Normalverteilung sieht sie aber aufgrund der großen Streuungen und den möglichen negativen Ankunftszeiten, die sich daraus ergeben würden, nicht gerechtfertigt.

a) Ist die Stichprobe gepaart oder ungepaart? Welcher Test ist angebracht um die gegebenen Informationen bestmöglich auszunützen?

b) Formulieren Sie die Null- und Alternativhypothese. Ist der Test ein- oder zweiseitig?

c) Führen Sie den Test durch. Wie entscheidet der Test?

d) Nehmen wir nun an einer der beiden hat den Zettel mit den aufgeschriebenen Zeiten verschmissen, Frau Hürzeler kann sich nur noch daran erinnern wie oft das Taxiunternehmen B schneller war. Ihnen bleibt also nur noch der Vorzeichentest übrig. Führen Sie diesen Test durch, zum selben Niveau wie vorher. Wie entscheidet der Test?

Hinweis: Der Test kann z.B. durchgeführt werden durch Ermitteln des Vertrauensintervalles (mittels des beiliegenden Nomogramms) für den Erfolgsparameter p der Binomialverteilung.