Stochastik
(BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

Schreiben Sie für Aufgabe 2-4 stets alle Zwischenschritte und -rechnungen sowie Begründungen auf. Aufgabe 1 ist eine Multiple Choice Aufgabe (keine Begründungen notwendig).

Die Tabellen der Normalverteilung, t-Verteilung und Verwerfungsbereiche für den Wilcoxon-Test wurden mit der Prüfung ausgeteilt.

1. (10 Punkte)

Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig. Es gibt pro richtig beantwortete Frage 1 Punkt und pro falsche Antwort 1/2 Punkt Abzug. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte. **Bitte benützen Sie das beiliegende Antwortblatt.**

a) Seien T_1 und T_2 unabhängig und Bernoulli(p)-verteilt. Dann gilt

1. $\max(T_1, T_2)$ ist Bernoulli(p^2)-verteilt.
2. $\min(T_1, T_2)$ ist Bernoulli(p^2)-verteilt.
3. Weder 1. noch 2. ist korrekt.

b) Wir betrachten eine Zufallsvariable X mit folgender kumulativer Verteilungsfunktion F:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 1, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Dann ist für $\alpha \in (0,1)$ das α-Quantil gegeben durch

1. $q_\alpha = 2 - 2\sqrt{1-\alpha}$.
2. $q_\alpha = 2 + 2\sqrt{1-\alpha}$.
3. $q_\alpha = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{1-\alpha}$.

Bitte wenden!

c) Seien X und Y unabhängig und identisch verteilt. Dann gilt

1. $E[X/Y] = E[X]/E[Y]$.
2. $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(2X)$
3. $\text{Var}(X-Y) \geq \text{Var}(X)$.

d) Sei A und B zwei Ereignisse mit $A \subset B$, $P(B) = \frac{2}{3}$ und $P(A) > 0$. Dann gilt

1. $P(B|A) = 1$.
2. $P(A|B) = \frac{2}{3}P(A)$.
3. $P(A \cup B) = \frac{2}{3} + P(A)$.

e) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit $X_i \sim \text{Pois}(\lambda)$. Dann gilt:

1. $\overline{X}_n$ ist für grosse n approximativ normalverteilt mit Erwartungswert λ und Varianz λ.
2. $\overline{X}_n$ konvergiert gegen die Konstante λ für $n \to \infty$.
3. $\overline{X}_n$ ist für grosse n approximativ Poisson-verteilt mit Erwartungswert λ.

f) Eine Maschine produziert Stahlrohre. Sie vermuten, dass die Rohre im Schnitt zu lang sind und beauftragen eine Statistikerin, für Sie einen einseitigen Z-Test der Nullypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen die Alternativhypothese $H_A : \mu > \mu_0$ zum Niveau $\alpha = 5\%$ durchzuführen. Die Statistikerin führt den Test durch und errechnet für die realisierte Teststatistik den Wert 1.85. Dann gilt:

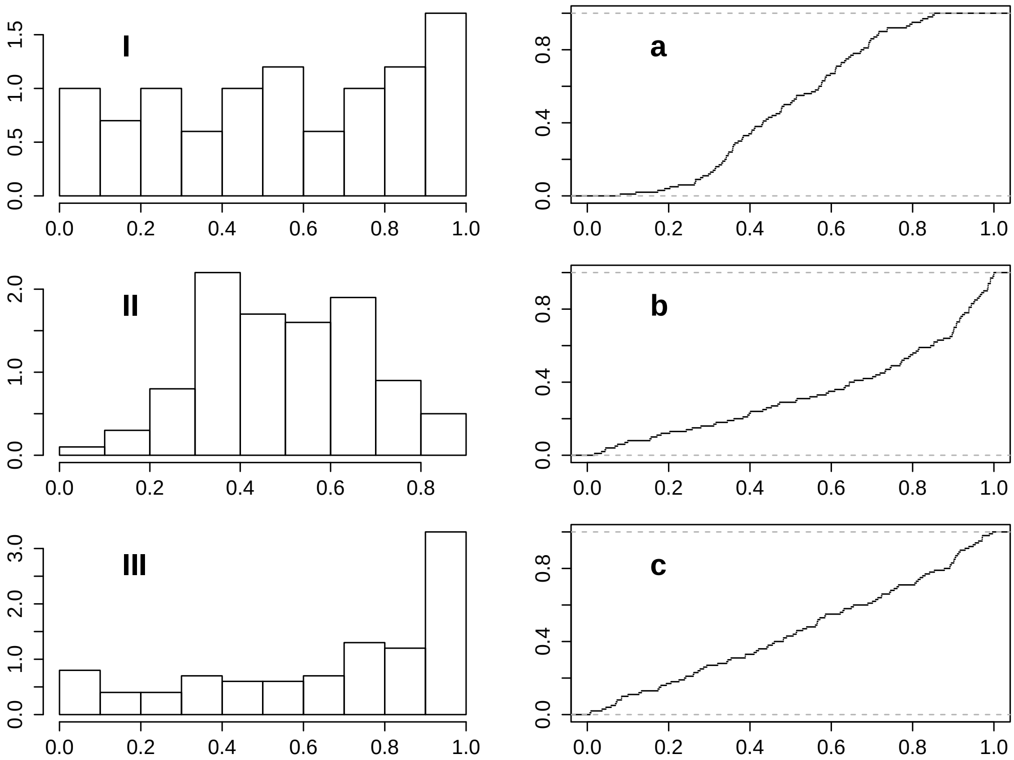
1. Der p-Wert ist grösser als α.
2. Der p-Wert ist ungefähr 3.2%.
3. Weder 1. noch 2. ist korrekt.

g) Ein Milchproduzent befürchtet, dass die Maschine, die er zum Abfüllen von Milchflaschen benutzt, im Durchschnitt zu ungenau arbeitet. Das Füllvolumen einer Flasche sollte im Schnitt 1 Liter betragen, dies ist die Nullhypothese. Falls das mittlere Füllvolumen um weniger als δ ml von $1l$ abweicht, so ist dies für ihn nicht relevant. Nach sorgfältigem Testen haben Statistikexperten das Vertrauensintervall (in ml) zum Niveau 95% für den Mittelwert des Füllvolumens als $(985, 997)$ bestimmt. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

1. Für den Wert $\delta = 20$ ist die Abweichung statistisch signifikant und fachlich relevant.
2. Für den Wert $\delta = 10$ ist die Abweichung statistisch nicht signifikant, aber eventuell fachlich relevant.
3. Für den Wert $\delta = 2$ ist die Abweichung statistisch signifikant und fachlich relevant.

Siehe nächstes Blatt!

h) Für drei Stichproben vom Umfang n = 100 wurden je ein Histogramm und die empirische Verteilungsfunktion gezeichnet. Welche Zuordnung der Histogramme zu den entsprechenden empirischen Verteilungsfunktionen ist korrekt?



1. Ic, IIb, IIIa.
2. Ia, IIc, IIIb.
3. Ic, IIa, IIIb.

Bitte wenden!

i) In einer Studie soll getestet werden, ob sich der Anteil an Blau als Grundfarbe im linken und rechten Auge unterscheidet. Dazu wird bei 7 Probanden der RGB-Anteil von Blau auf beiden Augen gemessen. Man erhält folgende Werte:

Proband Nr.	1	2	3	4	5	6	7
RGB-Anteil von Blau auf dem rechten Auge	155	230	28	8	145	169	15
RGB-Anteil von Blau auf dem linken Auge	157	201	50	5	175	168	19
Differenz der RGB-Anteile	-2	29	-22	3	-30	1	-4

Dann gilt:

1. Die realisierte Teststatistik für einen Wilcoxon-Test nimmt den Wert $W = 18$ an.
2. Ein zweiseitiger Wilcoxon-Test zum Niveau 5% verwirft die Nullhypothese 'beide Augen haben denselben Anteil an Blau' bei einem realiserten Wert der Teststatistik in $[0, 3] \cup [25, 28]$.
3. Die Nullhypothese 'beide Augen haben denselben Anteil an Blau' wird bei einem zweiseitigen Wilcoxon-Test zum Niveau 5% nicht verworfen.

j) Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\vartheta^2+2\vartheta}, & x \in [1, \vartheta+1] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

für ein $\vartheta > 0$ unbekannt. Dann ist der Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ (basierend auf einer Stichprobe der Grösse n von unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \cdots, X_n$ mit derselben Verteilung wie X) gegeben durch

1. $\max_{i=1,\cdots,n} X_i$
2. $\min_{i=1,\cdots,n} X_i$
3. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

2. (Total 8 Punkte) In einer Kleinstadt bietet ein Eisverkäufer verschiedene Sorten an, die er nach einem besonderen Rezept herstellt. Zu den meistverkauften Geschmacksrichtungen gehören Schokolade-, Vanille- und Erdbeereis. Jeder Kunde kann verschiedene Sorten in seinem Eisbecher kombinieren und wirft für jede Sorte eine gezinkte Münze, die mit Wahrscheinlichkeit 60% 'Kopf' zeigt. Falls die Münze 'Kopf' zeigt, so fügt er diese Sorte zu seinem Becher hinzu, andernfalls lässt er sie weg. Das Ergebnis dieses Münzwurfs ist unabhängig vom Ergebnis bei den übrigen Sorten und denjenigen der anderen Kunden. Leider sind nicht alle Kunden mit seinem Spezialrezept zufrieden. Eine Erhebung hat ergeben, dass im Schnitt nur 70% der Kunden, die sein Schokoladenrezept probiert haben, den Eisverkäufer weiterempfehlen würden. Da die übrigen Sorten und die Einrichtung des Lokals aber sehr beliebt sind, würden nur 10% der Kunden, die keine Schokolade probiert haben, den Eisverkäufer nicht weiterempfehlen.

a) (2 Punkte) Sie fragen einen zufällig ausgewählten Kunden nach seiner Meinung zum Eisverkäufer. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er Ihnen den Eisverkäufer weiterempfehlen wird?

b) (2 Punkte) Angenommen ein Schokoladenliebhaber befragt einen zufällig ausgewählten Kunden nach seiner Meinung zum Eisverkäufer und der Kunde empfiehlt ihm den Eisverkäufer. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Kunde Schokoladeneis probiert hat.

Wir nehmen nun an, dass die Münze mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ Kopf zeigt. Eines morgens beginnt der Eisverkäufer zu zählen, beim wievielten Kunden zum ersten Mal ein Becher verkauft wird, der Schokoladen- und/oder Vanilleeis enthält.

c) (2 Punkte) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dies beim k-ten Kunden passiert? (In Abhängigkeit von p, für $k = 1, 2, ...$)

d) (2 Punkte) Sei X die Zufallsvariable, die den Wert k annimmt, wenn dies beim k-ten Kunden passiert. Was ist der Erwartungswert von X in Abhängigkeit von p (keine Herleitung nötig)? Angenommen der Eisverkäufer weiss, dass im Schnitt bereits der $\frac{4}{3}$-te Kunde einen Becher mit Schokoladen- oder Vanilleeis erwirbt, welchen Wert hat dann p?

Bitte wenden!

3. (Total 8 Punkte) Eine Kaffeemaschine an der ETH funktioniert nicht mehr vollständig und füllt die Becher mit einer zufälligen Menge Kaffee und einer zufälligen Menge Milch (wobei der Becher nicht immer ganz gefüllt sein muss). Die Menge an Kaffee bzw. Milch, den die Maschine in einen Becher füllt, sei gegeben durch die Zufallsvariable X bzw. Y.

Die gemeinsame Dichte von X und Y sei gegeben durch

$$f_{X,Y}(x,y) := \begin{cases} cxy & 0 \le x,\ 0 \le y,\ x+y \le 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) (1 Punkt) Berechnen Sie c.

Falls Sie Teilaufgabe a) nicht lösen können, drücken Sie die Antworten der übrigen Aufgaben in Abhängigkeit von c aus.

b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Becher mehr Milch als Kaffee enthält.

c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$.

d) (1 Punkt) Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie.

e) (2 Punkte) Gegeben, dass die Menge an Kaffee $\frac{1}{3}$ ist, welchen Wert erwarten Sie für die Menge an Milch?

4. (Total 8 Punkte) In einem Super Mario-Videogame kann der Spieler Pilze sammeln um stärker zu werden. Während des Spiels taucht an 3 Stellen ein Glücksrad auf, bei dem man einen Pilz gewinnen kann. Bei jedem Glücksrad erhält man mit Wahrscheinlichkeit p einen Pilz, unabhängig davon ob man bei den anderen Glücksrädern bereits einen Pilz gewonnen hat oder nicht. Sie möchten diese Wahrscheinlichkeit p schätzen. Daher spielen 5 Spieler unabhängig voneinander das Spiel und Sie zählen die Anzahl Pilze, die jeder einzelne dabei gesammelt hat:

Spieler Nr.	1	2	3	4	5
Anzahl Pilze	3	0	1	2	1

Alle Spieler sind Profis und erreichen alle drei Glücksräder.

a) (2 Punkte) Leiten Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für p her (basierend auf n Spielern, die das Spiel unabhängig voneinander spielen und dabei X_1 bzw. X_2 ... bzw. X_n Pilze sammeln). Werten Sie diesen Schätzer aus für die angegebene Stichprobe.

b) (2 Punkt) Wenn Super Mario einen Pilz isst, verdoppelt sich seine Grösse. Isst er dann noch einen zweiten Pilz, so kann er Feuerbälle werfen und wenn er auch noch einen Dritten verspeist, kann er schweben. Unter der Annahme, dass der wahre Wert von p durch die Schätzung in a) gegeben ist (d.h. dem Maximum-Likelihood Schätzer ausgewertet an obiger Stichprobe), was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Mario am Ende des Spiels Feuerbälle werfen kann?

Falls Sie Teilaufgabe a) nicht lösen konnten, drücken Sie die Antwort in Abhängigkeit von p aus.

Sie senden einen Brief an Nintendo um nach dem wahren Wert von p zu fragen. Nintendo antwortet Ihnen, dass dieser Wert $p_0 = 0.25$ sei. Sie vermuten aber, dass der wahre Wert grösser ist.

c) (3 Punkte) Es bezeichne Y die Gesamtanzahl an Pilzen, die in 5 unabhänigigen Spielen gesammelt werden. Konstruieren Sie einen einseitigen Test zum Niveau 5% basierend auf Y um Nintendos Behauptung zu überprüfen, d.h.

- formulieren Sie die Null- und Alternativhypothese
- geben Sie mit Hilfe der Tabellen (siehe Rückseite) den Verwerfungsbereich oder den p-Wert an
- bestimmen Sie den Testentscheid. Kann nachgewiesen werden, dass der wahre Wert von p grösser ist als von Nintendo behauptet?

d) (1 Punkte) Berechnen Sie mit Hilfe der Tabellen (siehe Rückseite) die Macht des in c) konstruierten Tests, falls in Wahrheit $p = 0.5$ gilt.

Bitte wenden!

	$X \sim \text{Bin}(n = 15, p = 0.25)$		$X \sim \text{Bin}(n = 15, p = 0.5)$	
x	$P[X = x]$	$P[X \leq x]$	$P[X = x]$	$P[X \leq x]$
0	0.013	0.013	0.000	0.000
1	0.067	0.080	0.000	0.000
2	0.156	0.236	0.003	0.003
3	0.225	0.461	0.014	0.017
4	0.225	0.686	0.042	0.059
5	0.165	0.851	0.092	0.151
6	0.092	0.943	0.153	0.304
7	0.039	0.982	0.196	0.500
8	0.013	0.995	0.196	0.696
9	0.004	0.999	0.153	0.849
10	0.001	1.000	0.092	0.941
11	0.000	1.000	0.042	0.983
12	0.000	1.000	0.014	0.997
13	0.000	1.000	0.003	1.000
14	0.000	1.000	0.000	1.000
15	0.000	1.000	0.000	1.000