Prof. M. Maathuis　　　　ETH Zürich　　　　Sommer 2019

Stochastik - Lösungen

1. (9 Punkte)

a)	(i)	☒ wahr	☐ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
	(ii)	☐ wahr	☒ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
	(iii)	☒ wahr	☐ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
b)	(i)	☒ wahr	☐ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
	(ii)	☒ wahr	☐ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
	(iii)	☐ wahr	☒ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
c)	(i)	☐ wahr	☒ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
	(ii)	☒ wahr	☐ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
	(iii)	☐ wahr	☒ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
d)	(i)	☒ wahr	☐ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
	(ii)	☐ wahr	☒ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
	(iii)	☐ wahr	☒ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
e)	(i)	☐ wahr	☒ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
	(ii)	☐ wahr	☒ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
	(iii)	☒ wahr	☐ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
f)	(i)	☐ wahr	☒ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
	(ii)	☐ wahr	☒ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
	(iii)	☐ wahr	☒ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**

2. (9 Punkte)

a) Sei E_i das Ereignis "Maschine i hat fehlerfrei produziert" für $i \in \{A, B, C\}$. Wir wissen, dass

$$P[E_A] = 0.95, \quad P[E_B] = 0.97, \quad P[E_C] = 0.85.$$

Da E_A, E_B und E_C unabhängig sind, gilt

$$P[\text{"kein Fehler"}] = P[E_A \cap E_B \cap E_C] = P[E_A]P[E_B]P[E_C] = 0.95 \cdot 0.97 \cdot 0.85 = 0.783$$

(1 Pkt)

b) Da E_A, E_B und E_C unabhängig sind, gilt

$$P[E_A^c \cup E_B^c | E_C^c] = P[E_A^c \cup E_B^c] = 1 - P[E_A \cap E_B] = 1 - P[E_A]P[E_B] = 1 - 0.95 \cdot 0.97 \approx 0.079$$

(1 Pkt)

c) Es gilt $X_3 \sim Binom(n, p)$ mit $n = 3$ und $p = 0.7$, und **(0.5 Pkt)**

$$P[X_3 \geq 2] = P[X_3 = 2] + P[X_3 = 3] = 3p^2(1 - p) + p^3 = 78.4\%$$

(0.5 Pkt)

d) Es gilt $X_{1000} \sim Binom(n, p)$ mit $n = 1000$ und $p = 0.7$. Daher gilt **(0.5 Pkt)**

$$E[X_{1000}] = 700$$

(0.5 Pkt)

sowie

$$Var(X_{1000}) = np(1 - p) = 210$$

Es reicht, diese Aussagen als $X_{1000} \approx N(700, 210)$ zusammenzufassen. **(0.5 Pkt)**

Damit gilt mittels Normalapproximation

$$P[X_{1000} \geq 715] = 1 - P[X_{1000} < 715]$$
$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{715 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{715 - 700}{\sqrt{210}}\right) = 1 - \Phi(1.03) = 1 - 0.8485 = 15.15\%.$$

(0.5 Pkt)

e) Sei S_1 das Ereignis, dass Schritt 1 fehlerfrei durchlaufen wurde und für $i \in \{1, 2\}$ sei $S_{2,i}$ das Ereignis, dass Schritt 2 für die Torte vom Typ i fehlerfrei durchlaufen wurde. Es gilt

$$P[S_1] = 0.96, \quad P[S_{2,1}] = 0.94, \quad P[S_{2,2}] = 0.97\ .$$

S_1, $S_{2,1}$ und $S_{2,2}$ sind unabhängig und

$$P[Y_1 = 1, Y_2 = 1] = P[S_1 \cap S_{2,1} \cap S_{2,2}] = P[S_1]P[S_{2,1}]P[S_{2,2}] = 0.875$$

(0.5 Pkt)

$$P[Y_1 = 1, Y_2 = 0] = P[S_1 \cap S_{2,1} \cap S_{2,2}^c] = P[S_1]P[S_{2,1}](1 - P[S_{2,2}]) = 0.027$$

(0.5 Pkt)

$$P[Y_1 = 0, Y_2 = 1] = P[S_1 \cap S_{2,1}^c \cap S_{2,2}] = P[S_1](1 - P[S_{2,1}])P[S_{2,2}] = 0.056$$

(0.5 Pkt)

Für die letzte Wahrscheinlichkeit kann auf zwei Arten argumentiert werden:

$$P[Y_1 = 0, Y_2 = 0] = 1 - P[Y_1 = 1, Y_2 = 1] - P[Y_1 = 1, Y_2 = 0] - P[Y_1 = 0, Y_2 = 1]$$
$$= 1 - 0.875 - 0.056 - 0.027 = 0.042\ ,$$

$$P[Y_1 = 0, Y_2 = 0] = P[S_1^c] + P[S_1 \cap S_{2,1}^c \cap S_{2,2}^c]$$
$$= 1 - P(S_1) + P[S_1] \cdot (1 - P[S_{2,1}])(1 - P[S_{2,2}]) = 0.042\ .$$

(0.5 Pkt)

f) Es gilt

$$E[Y_1] = P[Y_1 = 1] = p_{1,1} + p_{1,0} = 0.89,$$

(0.5 Pkt)

und

$$E[Y_2] = P[Y_2 = 1] = p_{1,1} + p_{0,1} = 0.85,$$

(0.5 Pkt)

und damit

$$\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = E[Y_1Y_2] - E[Y_1]E[Y_2]$$

(0.5 Pkt)

$$= P[Y_1 = 1, Y_2 = 1] - E[Y_1]E[Y_2] = 0.0635$$

(0.5 Pkt)

In der ganzen Aufgabe sollen Folgefehler vergeben werden, falls statt mit Werten aus der Aufgabenstellung mit jenen aus vorigen Teilaufgaben gearbeitet wird.

3. (8 Punkte)

a) Sei L_R die Lebensdauer des Mobiltelefons vom Typ R. Dann gilt

$$P[L_R \geq 2] = e^{-2\lambda_R} \, .$$

(0.5 Pkt)

Wenn $\lambda_R = 0.15$, dann gilt $P[L_R \geq 2] = e^{-0.3} \approx 74.08\%$

Kein Folgefehler, insgesamt 0.5 Pkt, falls nur ein spezieller Fall berechnet wird. **(0.5 Pkt)**

b) Wir suchen den Wert m, sodass $P[L_R \geq m] = 1/2$, also

$$\frac{1}{2} = P[L_R \geq m] = e^{-\lambda_R m}.$$

Nehmen wir den Logarithmus auf beiden Seiten, erhalten wir

$$-\lambda_R m = \log(1/2) \, .$$

Also, mit $\lambda_R = 0.15$

$$m = \frac{\log(2)}{\lambda_R} \approx 4.62.$$

Kein Punkt falls Erwartungswert berechnet wird, bei richtigem Ansatz –0.5 Pkt pro Rechenfehler. **(1.5 Pkt)**

c) Da die Exponentialverteilung gedächtnislos ist, gilt

$$P[L_R \leq 2 | L_R > 0.5] = P[L_R \leq 1.5] = 1 - e^{-1.5\lambda_R} = 1 - e^{-1.5 \cdot 0.15} \approx 20\%.$$

Oder explizit berechnen.

Punkt auch, falls nur $P[L_R \leq 1.5]$ berechnet wird, kein Punkt für $P[0.5 \leq L_R \leq 2]$ etc. **(1 Pkt)**

d) Die exponentialverteilte Zufallsvariable L_T hat erstes Moment $\mathbb{E}[L_T] = \frac{1}{\lambda_T}$ und damit den Momentenschätzer

$$\widehat{\lambda}_T^{(1)} = \frac{1}{\bar{x}}.$$

(1.5 Pkt)

Das zweite Moment von L_T ist $\mathbb{E}[L_T^2] = \mathrm{Var}[L_T] + \mathbb{E}[L_T]^2 = \frac{2}{\lambda_T^2}$. Durch umformen erhalten wir

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{2}{\mathbb{E}[L_T^2]}} = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{Var}[L_T] + \mathbb{E}[L_T]^2}}$$

und damit den Schätzer

$$\hat{\lambda}_T^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{s^2 + \bar{x}^2}}.$$

(1.5 Pkt)

Durch Einsetzen der Werte erhalten wir

$$\hat{\lambda}_T^{(1)} = \frac{1}{4.75} \approx 0.21, \qquad \hat{\lambda}_T^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{s^2 + \bar{x}^2}} \approx 0.24.$$

1.5 Pkt pro Schätzer, inklusive Ergebnis; –0.5 Pkt pro Rechenfehler, keine Punkte bei falschem Ansatz oder bei $E[L_T^2] = 1/\lambda_T^2$ für zweiten Momentenschätzer, kein Punkt falls Schätzer via $E[L_T^2] = \mathrm{Var}[L_T] + E[L_T]^2$, mit $E[L_T^2]$ und $\mathrm{Var}[L_T]$ geschätzt aus der Stichprobe, gebaut wird, da dieser auf dem erstem Moment basiert.

e) Es gilt für $u \geq 0$, dass $U > u$ genau dann, wenn $L_R > u$, $L_S > u$ und $L_T > u$. Da L_R, L_S und L_T unabhängig sind, gilt

$$P[U \leq u] = 1 - P[U > u] = 1 - P[L_R > u]P[L_S > u]P[L_T > u] = 1 - e^{-(\lambda_R+\lambda_S+\lambda_T)u}.$$

(1 Pkt)

Damit ist U exponentialverteilt mit Parameter $\lambda_U = \lambda_R + \lambda_S + \lambda_T$.

Nur 0.5 Pkt bei richtiger Antwort ohne Begründung. **(0.5 Pkt)**

4. (10 Punkte)

a) (i)

- Wir können nicht ohne weiteres von einer Normalverteilung ausgehen, daher ist der Wilcoxontest hier besser geeigner als der T-Test. **(0.5 Pkt)**
- Verglichen mit einem Vorzeichentest hat der Wilcoxontest eine höhere Macht **(0.5 Pkt)**

(ii) $H_0 : \mu_X = 6.49$, $H_A : \mu_X \neq 6.49$. **(0.5 Pkt)**

(iii) Die Test-Statistik ist

$$W = \sum_{i=1}^{7} R_i \mathbf{1}\{X_i - 6.49 > 0\},$$

wobei $R_i := \text{Rang}(|X_i - 6.49|)$. Wir berechnen zunächst die Realisierungen der Ränge:

Messung	1	2	3	4	5	6	7
Wert x_i	6.61	6.02	6.79	7.23	7.28	7.15	7.14
$\|x_i - 6.49\|$	0.12	0.47	0.3	0.74	0.79	0.66	0.65
r_i	1	3	2	6	7	5	4
$\mathbf{1}\{x_i - 6.49 > 0\}$	1	0	1	1	1	1	1

Einen halben Punkt für jede der letzten drei Zeilen, egal in welcher Form – Folgefehler, aber Zeilen müssen komplett stimmen; falls mit 6.89 *statt* 6.49 *gearbeitet wurde, maximal 1 Pkt, nämlich für Ränge und für* w. **(1.5 Pkt)**

und somit

$$w = \sum_{i=1}^{7} r_i \mathbf{1}\{x_i - 6.49 > 0\} = 1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25.$$

Punkt für Folgefehler. **(0.5 Pkt)**

(iv) Aus der Tabelle erhalten wir den Verwerfungsbereich

$$V = \{0, 1, 2, 26, 27, 28\}.$$

(0.5 Pkt)

Da $w \notin V$ können wir die Nullhypothese - und damit die Herstellerangabe - nicht verwerfen

Folgefehler bei einseitigem Test. **(0.5 Pkt)**

b) (i) Wir entscheiden uns für einen ungepaarten Test, da zwei verschiedene Teststrecken vorliegen (alternativ: die Anzahl der Messungen ist underschiedlich, also kann es sich nicht um einen gepaarten Test handeln). **(0.5 Pkt)**

(ii) $H_0 : \mu_X = \mu_Y$, $H_A : \mu_X \neq \mu_Y$. **(0.5 Pkt)**

(iii) Die Teststatistik ist

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} .$$

(0.5 Pkt)

Damit erhalten wir den realisierten Wert

$$z = \frac{6.89 - 7.075}{0.8\sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{8}}} = -0.4468 .$$

Keine Punkte für Standard Z-Test; bei ungepaartem T-Test, insgesamt maximal 1 Pkt, –0.5 Pkt pro Fehler. **(1 Pkt)**

(iv) Unter der Nullhypothese gilt $Z \sim N(0,1)$, also erhalten wir aus der Standardnormaltabelle, dass dann $P[Z \geq 1.96] = 0.025$ und $P[Z \leq -1.96] = 0.025$. Damit erhalten wir den Verwerfungsbereich

$$V = (-\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty).$$

(0.5 Pkt)

Die realisierte Teststatistik z ist nicht im Verwerfungsbereich und damit können wir die Aussage des Herstellers nicht zurückweisen

Punkt für Folgefehler wird gegeben. **(0.5 Pkt)**

(v) Unter der Annahme $\mu_X - \mu_Y = -0.5$, gilt $Z \sim N(-0.5/(0.8\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}), 1)$ (man beachte, dass dies eine andere Verteilung als unter der Nullhypothese ist) **(0.5 Pkt)**

Also ist $\tilde{Z} = Z + 1/(1.6\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}) \sim N(0,1)$. Die Macht ist hier gegeben als

$$\mathbb{P}[\text{Test verwirft } H_0 \text{ für } \mu_X - \mu_Y = -0.5] = \mathbb{P}[Z \geq 1.96] + \mathbb{P}[Z \leq -1.96].$$

Wir erhalten für den ersten Summanden

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Z \geq 1.96] = \mathbb{P}[Z + 1/(1.6\sqrt{\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}}) \geq 1.96 + 1/(1.6\sqrt{\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}})]\\ = \mathbb{P}[\tilde{Z} \geq 3.17] = 0.0008\ ,\end{aligned}$$

(0.5 Pkt)

wobei $\tilde{Z} = Z + 1/1.6\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}$ standardnormalverteilt ist (für $\mu_X - \mu_Y = -0.5$). Auf dem gleichen Weg erhalten wir,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Z \leq -1.96] = \mathbb{P}[Z + 1/(1.6\sqrt{\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}}) \leq -1.96 + 1/(1.6\sqrt{\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}})]\\ = \mathbb{P}[\tilde{Z} \leq -0.75] = 0.2266.\end{aligned}$$

(0.5 Pkt)

Die Macht des Tests bei $\mu_X - \mu_Y = -0.5$ beträgt also 22.74%.

Kein Folgefehler bei gepaartem Z-Stichproben-Test oder einseitigem Test. **(0.5 Pkt)**