Prof. M. Maathuis | ETH Zürich | 14. August 2021

D–MATL D–MAVT RW

Stochastik (401-0603-00L)

Prüfungsangabe

Bitte noch nicht umblättern!

1. (10 Punkte) Beurteile die folgenden 20 Aussagen auf Ihre Richtigkeit. Die Aussagen sind jeweils in Zweier- oder Dreiergruppen eingeteilt. **In einer Gruppe können alle, einige oder keine einzige Aussage richtig sein. Kreuze Deine Antworten auf dem zusätzlich angehängten Antwortblatt an**. Pro korrekter Antwort gibt es einen halben Punkt. Es gibt keinen Punkteabzug für falsche Antworten.

a) Ein Patient macht einen Allergietest auf Allergene X und Y. Wir definieren die Ereignisse A: „Der Patient reagiert auf Allergen X" und B: „Der Patient reagiert auf Allergen Y". Es sei $P(A) = 0.2$ und $P(B) = 0.3$. Zusätzlich wissen wir, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Patient auf keines der Allergene reagiert, 0.6 beträgt. Dann gilt:

(i) $P(A|B) = \frac{1}{3}$.
(ii) $P(A \cup B) = 0.4$.
(iii) Es gibt zu wenig Information, um $P(A \cap B)$ zu berechnen.

b) Wir betrachten n i.i.d. Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$. Sei $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ und $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Beurteile folgende Aussagen:

(i) Um die Standardabweichung von $\bar{X}_n$ zu halbieren, braucht man 2 mal so viele Beobachtungen.
(ii) Die Varianz von S_n wächst linear in n.
(iii) Der Erwartungswert von $\bar{X}_n$ wächst linear in n.

c) Beurteile folgende Aussagen zu einem statistischen Test:

(i) Der p-Wert ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese stimmt.
(ii) Um den Verwerfungsbereich eines Tests zu bestimmen braucht man die Verteilung der Teststatistik unter der Nullhypothese und unter der Alternativhypothese.
(iii) Die Macht eines Tests kann man bestimmen aus dem Verwerfungsbereich und der Verteilung der Teststatistik unter der Alternativhypothese.

d) Seien $X_1, \ldots, X_{30}$ i.i.d. Beobachtungen von einer $N(\mu, \sigma^2)$ Verteilung, wobei μ und σ^2 unbekannt sind. Beurteilen Sie folgende Aussagen zu einem Z-Test auf Niveau α, wobei $H_0 : \mu = -2$ versus $H_a : \mu \neq -2$ getestet wird:

(i) Der Test verwirft die Nullhypothese genau dann wenn das $(1 - \alpha)100\%$ Vertrauensintervall für μ den Wert -2 nicht enthält.
(ii) Je mehr Beobachtungen wir haben, desto grösser wird die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art.
(iii) Sei t der realisierte Wert der Teststatistik. Der p-Wert ist gegeben durch

$$2\mathbb{P}[T \geq t],$$

wobei T eine t-Verteilung mit 29 Freiheitsgraden hat.

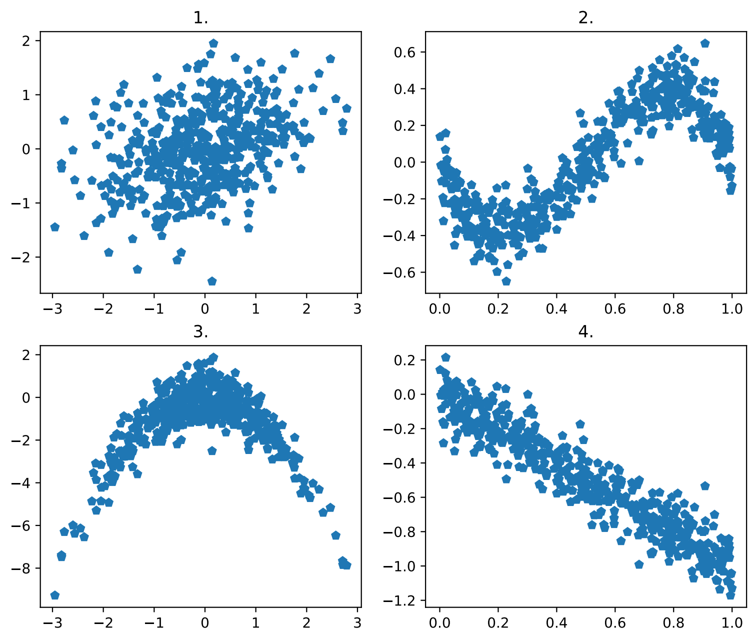
e) Ordne die vier Scatterplots den empirischen Korrelationen

$$\mathrm{a} = 0.10, \quad \mathrm{b} = 0.36, \quad \mathrm{c} = -0.94, \quad \mathrm{d} = 0.79$$

zu und beurteile die folgenden Aussagen:

(i) Es gilt 3a und 4c.

(ii) Es gilt 1d und 2b.



f) Betrachte die folgenden Plots zweier diskreter Verteilungsfunktionen und beurteile die Aussagen:

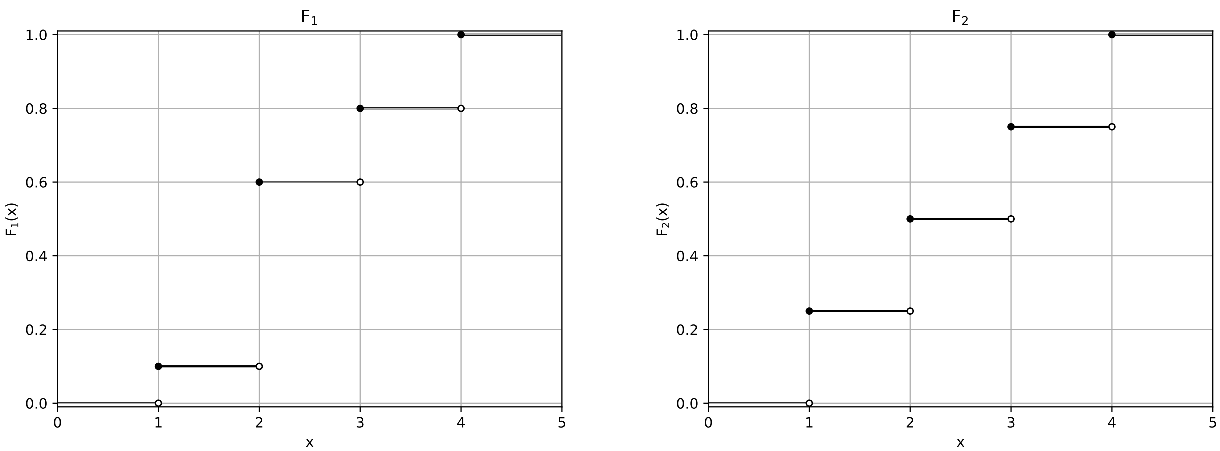
(i) Für eine Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion F_1 gilt

$$\mathbb{P}(3.6 \leq X \leq 5.6) = 0.2.$$

(ii) Für eine Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion F_2 gilt

$$\mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X \geq 2).$$

(iii) Der Erwartungswert der Verteilung F_1 ist grösser als der Erwartungswert der Verteilung F_2.



g) Ordne die vier QQ-Normalplots den folgenden Realisierungen

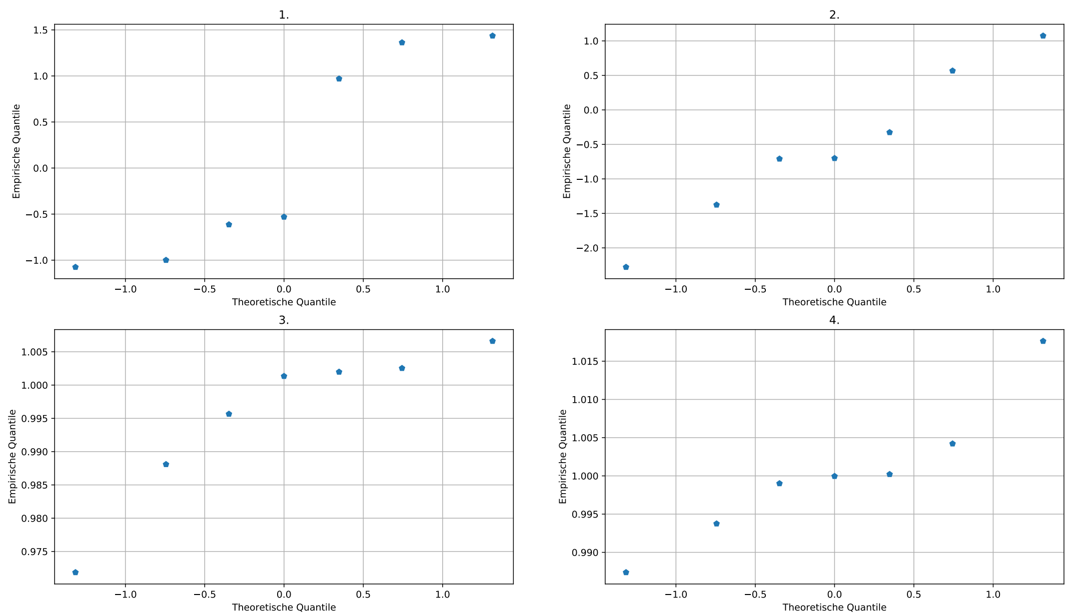
a	-1.076	-0.614	1.436	1.363	0.97	-0.531	-1
b	1.007	1.001	1.003	0.972	0.988	1.002	0.996
c	1.018	1	1	0.999	1.004	0.994	0.987
d	0.567	-0.709	1.074	-0.326	-0.701	-1.376	-2.278

zu und beurteile folgende Aussagen:

(i) Es gilt 3b und 4c.

(ii) Es gilt 1d und 2a.

(iii) Die Daten im 3. Plot sind links-schief (d.h. das linke Ende der Verteilung ist lang, und das rechte Ende ist kurz).



2. (10 Punkte) Nachdem die Coronakrise erfolgreich überstanden ist, möchte eine Gruppe Sozialforscher den Grad der vielbesagten Selbstverantwortung in der Bevölkerung analysieren. Genauer geht es darum den Anteil $0 < p < 1$ der Personen, die Quarantänevorschriften missachtet haben, zu schätzen.

Dafür wird anhand einer Gruppe von Personen, die eine Zeit lang in Quarantäne verbringen mussten, folgendes Experiment durchgeführt:

Sei $x \in \{0, \frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \ldots, 1\}$ bekannt. Eine Urne enthält hundert Umschläge. $100x$ von ihnen enthalten die Frage: "Haben Sie jemals Ihre Quarantänepflicht verletzt?" Die anderen $100(1-x)$ enthalten die Frage: "Haben Sie Ihre Quarantänepflicht stets eingehalten?"
N Personen werden nun zufällig aus der Gruppe ausgewählt. Nacheinander wird jede von ihnen gebeten, einen Umschlag aus der Urne zu nehmen, seinen Inhalt zu lesen und ihn dann wieder in die Urne zurückzulegen. Sie muss dann die Frage, die sie gelesen hat, laut mit "ja" oder "nein" beantworten. Also kennt nur sie allein die Frage, die in dem Umschlag enthalten war. Deshalb können wir, falls x nicht sehr nahe an 0 oder 1 ist, annehmen, dass jeder nur wahrheitsgemässe Antworten gibt. Es bezeichne Y die Anzahl derjenigen Personen, die mit "ja" geantwortet haben.

a) (2 Punkte) Zeige, dass Y binomialverteilt ist mit Parametern N und $p^* := p(2x-1) + 1 - x$.

b) (1 Punkt) Zeige, dass

$$\hat{p} = \frac{Y/N - 1 + x}{2x - 1}$$

ein Momentenschätzer für p ist.

Hinweis: Betrachte hierzu die Zufallsvariable Y. Du kannst annehmen, dass $x \neq 1/2$.

c) (1 Punkt) Das Experiment wird mit $x = 0.25$ und $N = 100$ Personen durchgeführt und resultiert in 58% "ja"-Antworten. Wie lautet der realisierte Wert des Momentenschätzers?

d) (1 Punkt) Berechne den Erwartungswert des Schätzers $\hat{p}$ aus **b)**.

e) (3 Punkte) Bestimme die Varianz des Schätzers $\hat{p}$ aus **b)** für $N = 100, p = 0.3$ und sowohl $x = 0.55$ als auch $x = 0.95$. Nenne je einen Vorteil für die Wahl $x = 0.55$ und die Wahl $x = 0.95$.

f) (2 Punkte) Wie gross ist approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass unter $N = 100$ befragten Personen mindestens 65 mit "ja" antworten, wenn $p = 0.3$ und $x = 0.25$? Benutze die Normalapproximation und die Tabelle der Standardnormalverteilung.

3. (8 Punkte)

Die Anzahl X^{CH} der Bestellungen, die in der Schweiz pro Sekunde bei Amazon aufgegeben werden, ist Poisson-verteilt mit Ratenparameter $\lambda > 0$. Wir möchten diese Rate gerne schätzen.

a) (2 Punkte) Gib die Likelihoodfunktion $L(\lambda|x_1, \ldots, x_n)$ für n Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$ an. Bestimme den Maximum-Likelihood Schätzer $\hat{\lambda}^{\text{MLE}}$ als Funktion von x_i, $i = 1, \ldots, n$. Nenne den konkreten Schätzwert wenn innerhalb einer Minute (d.h. $n = 60$) 2100 Bestellungen aufgegeben werden.

Wir nehmen an, dass auch die Anzahl X^{AT} der Bestellungen, die im Nachbarland Österreich pro Sekunde bei Amazon aufgegeben werden Poisson-verteilt ist mit dem selben Ratenparameter $\lambda > 0$, d.h.

$$X^{AT} \sim \text{Poi}(\lambda).$$

Ausserdem nehmen wir an, dass X^{CH} und X^{AT} unabhängig sind.

b) (1 Punkt) Was ist die Verteilung der Gesamtzahl der in der Schweiz und Österreich pro Sekunde aufgegebenen Bestellungen? Begründe deine Antwort.

c) (2 Punkte) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in Österreich und der Schweiz genau 70 Bestellungen pro Sekunde aufgegeben werden, gegeben, dass die Anzahl der Bestellungen pro Sekunde in Österreich 36 beträgt. Gib die Antwort als Funktion von λ an.

Wirtschaftsforscher sind skeptisch gegenüber der Unabhängigkeitsannahme. Sie vermuten, dass ein linearer Zusammenhang zwischen der Anzahl der Bestellungen in der Schweiz X^{CH} und jener der Bestellungen in Österreich X^{AT} besteht. Sie berechnen die empirische Korrelation r auf Grund von Paaren $(x_i^{\text{CH}}, x_i^{\text{AT}})$, $i = 1, \ldots, n = 3600$, die in einer Stunde beobachtet wurden, und erhalten den realisierten Wert 0.08 mit einem Standardfehler von 0.015.

d) (2 Punkte) Konstruiere ein 90%-Vertrauensintervall für die wahre Korrelation ϱ unter der Annahme, dass r normalverteilt (mit Erwartungswert ϱ) ist.

e) (1 Punkt) Benutze die Dualität zwischen Tests und Vertrauensintervallen um zu entscheiden, ob $H_0 : \varrho = 0$ zum Niveau $\alpha = 10\%$ verworfen wird versus $H_A : \varrho \neq 0$. Begründe deine Antwort!

4. (8 Punkte) A und B programmieren jeweils einen Generator, der standardnormalverteilte (pseudo) Zufallszahlen liefert. Sie erhalten die folgenden Realisierungen:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_i	-1.27	-0.65	-0.76	1.59	2.05	0.01	0.68	0.18	-0.69	-0.13	0.09
b_i	0.29	0.23	-0.17	0.73	0.86	-0.94	0.28	0.33	-0.14	-1.44	-0.33
$d_i = a_i - b_i$	-1.56	-0.88	-0.59	0.86	1.19	0.95	0.4	-0.15	-0.55	1.31	0.42

mit

$$\bar{a} = 0.1, \quad \bar{b} = -0.027, \quad \bar{d} = 0.127,$$

und

$$s_a = 0.964, \quad s_b = 0.654, \quad s_d = 0.895.$$

B misstraut den Realisierungen des Generators von A. Er vermutet, dass der Mittelwert der von Generator A erzeugten Zahlen vom Mittelwert seiner Zufallszahlen abweicht und möchte dies mit einem Zweistichprobentest belegen.

a) (1 Punkt) Wir bezeichnen die Zufallsvariablen generiert von A mit A_i, die Zufallsvariablen generiert von B mit B_i und setzen $D_i := A_i - B_i$. Wir nehmen an, dass

$$A_i, \ldots, A_n \overset{\text{iid}}{\sim} F_A$$
$$B_i, \ldots, B_n \overset{\text{iid}}{\sim} F_B$$
$$D_i, \ldots, D_n \overset{\text{iid}}{\sim} F_D.$$

Wie lauten die Annahmen eines Zweistichproben Z-Tests mit bekannter Varianz $\sigma^2 = 1$ bezüglich F_A und F_B?

b) (4 Punkte) Führe einen Zweistichprobentest mit bekannter Varianz $\sigma^2 = 1$ zum Niveau $\alpha = 0.05$ durch:

(i) Formuliere Null- und Alternativhypothese sowie die Teststatistik.
(ii) Berechne den realisierten Wert der Teststatistik.
(iii) Berechne den Verwerfungsbereich.
(iv) Formuliere das Testergebnis im Sinne der Zufallsgeneratoren.

c) (1 Punkt) Was ist die Verteilung der Teststatistik, wenn der mittlere Wert, den Generator A ausgibt den mittleren Wert des Generators B um 0.1 übersteigt?

d) (2 Punkte) Zur Vermeidung von Folgefehlern nehmen wir nun folgendes über den Test in **b)** an: die Verteilung der Teststatistik unter $H_0 : \mu_A - \mu_B = 0$ ist $\mathcal{N}(0, 1)$, die Verteilung der Teststatistik unter $H_A : \mu_A - \mu_B = 0.1$ ist $\mathcal{N}(0.2, 1)$, der Verwerfungsbereich ist $(-\infty, -2.12) \cup (2.12, +\infty)$, der realisierte Wert der Teststatistik ist 0.45 und der p-Wert ist 0.6528. Berechne die Macht des Tests.

Stochastik - Tabellen

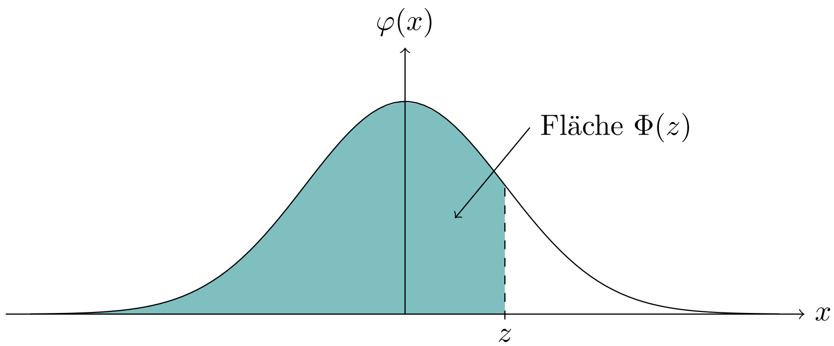
Kritische Grenzen beim Wilcoxon-Test für das 5%-Niveau:

	zweiseitig		einseitig	
n	l	u	l	u
6	0	21	2	19
7	2	26	3	25
8	3	33	5	31
9	5	40	8	37
10	8	47	10	45
11	10	56	13	53
12	13	65	17	61
13	17	74	21	70
14	21	84	25	80
15	25	95	30	90
16	29	107	35	101
17	34	119	41	112
18	40	131	47	124
19	46	144	53	137
20	52	158	60	150
21	58	173	67	164
22	65	188	75	178
23	73	203	83	193
24	81	219	91	209
25	89	236	100	225
26	98	253	110	241
27	107	271	119	259
28	116	290	130	276
29	126	309	140	295
30	137	328	151	314

Für den zweiseitigen Test ist der Verwerfungsbereich gegeben durch $K = \{W \leq l\} \cup \{W \geq u\}$.
Bei einem einseitigen Test verwendet man die entsprechenden Werte in der Spalte "einseitig".

Tabelle der Standardnormalverteilung:

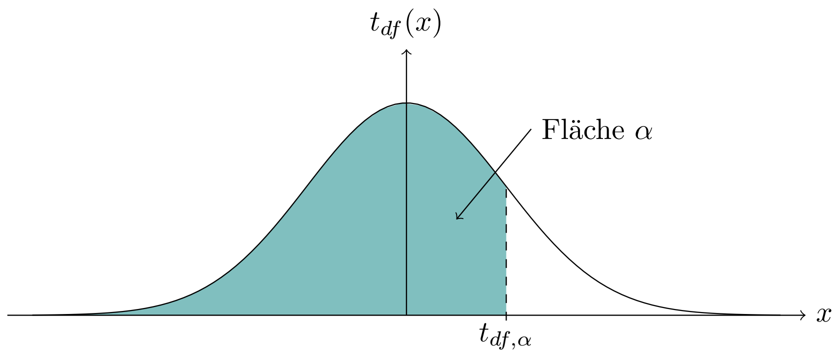
$$\Phi(z) = \mathbb{P}\left(Z \leq z\right), \ Z \sim \mathcal{N}\left(0,1\right)$$



Lesebeispiel Tabelle: $\mathbb{P}\left(Z \leq 1.96\right) = 0.975$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Quantile der t-Verteilung: (df bezeichnet den Freiheitsgrad)



Lesebeispiel Tabelle: $t_{9,\,0.975} = 2.262$

$df \setminus \alpha$	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
90	0.254	0.526	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576