Stochastik - Musterlösung
(BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

1. a) 2 b) 2 c) 3 d) 1 e) 2 f) 3 g) 2 h) 1 i) 3 j) 1

2. a) B bzw. G bezeichne das Ereignis, dass ein blaues bzw. grünes Auto an der Strassenecke vorbeikommt. B_* bzw G_* bezeichne das Ereignis, dass ein blaues bzw. grünes Auto gesehen wird. Dann gilt

$$\begin{aligned}
P(\text{Erkennen der falschen Farbe}) &= P(B \cap B_*^c) + P(G \cap G_*^c) \\
&= P(B_*^c|B)P(B) + P(G_*^c|G)P(G) \\
&= P(G_*|B)P(B) + P(B_*|G)P(G) \\
&= 0,2 * 0,15 + 0,4 * 0,85 \\
&= 0,37.
\end{aligned}$$

b) Aus der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit folgt

$$\begin{aligned}
P(B_*) &= P(B_*|B)P(B) + P(B_*|G)P(G) \\
&= 0,8 * 0,15 + 0,4 * 0,85 \\
&= 0,46.
\end{aligned}$$

c) Nach der Formel von Bayes gilt

$$\begin{aligned}
P(B|B_*) &= \frac{P(B_*|B)P(B)}{P(B_*|B)P(B)+P(B_*|G)P(G)} \\
&= \frac{0,8*0,15}{0,8*0,15+0,4*0,85} \\
&= 0,2609.
\end{aligned}$$

d) Wie oben gilt

$$\begin{aligned}
P(B|B_*) &= \frac{P(B_*|B)P(B)}{P(B_*|B)P(B)+P(B_*|G)P(G)} \\
&= \frac{qp}{qp+(1-q)(1-p)}.
\end{aligned}$$

Dies soll nun gröesser als 1/2 sein soll. Daraus folgt die Bedingung $p + q > 1$.

Bitte wenden!

3. **a)** $P(T > 100) = \int_{100}^{\infty} f_T(x)dx = \int_{100}^{\infty} \frac{1}{100} \exp\left(-\frac{x}{100}\right) dx = -\exp\left(-\frac{x}{100}\right)\Big|_{100}^{\infty} = e^{-1}$.

b) By integration by parts, we easily compute that:

$$\begin{aligned}
E[5000(T-100)^+] &= \int_{100}^{\infty} 5000(x-100) f_T(x)dx \\
&= \int_{100}^{\infty} 5000(x-100)\frac{1}{100} \exp\left(-\frac{x}{100}\right) dx \\
&= 5000 \left[-(x-100) \exp\left(-\frac{x}{100}\right)\Big|_{100}^{\infty} + \int_{100}^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{100}\right) dx\right] \\
&= 500000e^{-1}.
\end{aligned}$$

c) Wir berechnen zuerst die Maximum-Likelihood-Funktion:

$$l(\lambda) = \ln\left(\prod_{i=1}^{10} f_T(x_i)\right) = \ln\left(\lambda^{10} \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{10} x_i\right)\right) = 10\ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^{10} x_i.$$

By differentiating it, we obtain that:

$$\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{10}{\lambda} - \sum_{i=1}^{10} x_i.$$

Therefore, we finally get that

$$\frac{10}{\hat{\lambda}} - \sum_{i=1}^{10} x_i = 0 \iff \hat{\lambda} = \frac{10}{\sum_{i=1}^{10} x_i} = \frac{1}{95}.$$

4. **a)** $\bar{X} = 2162$, $\hat{\sigma} = 26.62$.

b) Nach Annahme ist $\bar{X}$ normalverteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ^2/n, wobei $n = 16$. Die Null- und Alternativhypothese lauten

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 2150 \quad \text{und} \quad H_A : \mu > \mu_0 = 2150.$$

Man sollte den t-Test verwenden.

c) Die Teststatistik für den t-Test ist

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} = \frac{2162 - 2150}{26.62/4} = 1.803.$$

Man erhält $t_{n-1,0.975} = 2.131$, also ist der Verwerfungsbereich für T gerade $[2.131, \infty)$ und die Nullhypothese wird auf dem 2.5% Niveau nicht verworfen.

d) Wir haben

$$P_{\mu=2160}[\frac{\bar{X} - 2160}{30/4} \leq \frac{2163 - 2160}{30/4}] = \Phi(\frac{2163 - 2160}{30/4}) = 0.6554.$$