Stochastik
(BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

Schreiben Sie für Aufgabe 2-4 stets alle Zwischenschritte und -rechnungen sowie Begründungen auf. Aufgabe 1 ist eine Multiple Choice Aufgabe (keine Begründungen notwendig).

Die für die Aufgaben benötigten Tabellen (Normalverteilung, Quantile der t-Verteilung) wurden mit der Prüfung ausgeteilt.

1. (10 Punkte)

Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig. Es gibt pro richtig beantwortete Frage 1 Punkt und pro falsche Antwort 1/2 Punkt Abzug. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte. **Bitte benützen Sie das beiliegende Antwortblatt.**

a) Es sei die diskrete Zufallsvariable X gegeben durch $P(X = \frac{2}{3}) = \frac{1}{6}$, $P(X = 1) = \frac{1}{2}$, $P(X = \frac{3}{2}) = \frac{1}{3}$. Wie gross ist $F_X(5/4)$?

1. $\frac{1}{2}$.
2. $\frac{2}{3}$.
3. 1.

b) Welche Aussage ist korrekt?

1. $\mathrm{Cov}(X + Y, X) = \mathrm{Var}(X)$.
2. $\mathrm{Cov}(X + Y, X) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Cov}(X, Y)$.
3. $\mathrm{Cov}(X + Y, X) = \mathrm{Var}(X) + 2\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Var}(Y)$.

c) Betrachte eine Reihe von unabhängigen Wiederholungen eines Experiments mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Welche ist die korrekte Verteilung für die Anzahl Wiederholungen, bis der erste Erfolg eintritt?

1. $p(x) = \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x(1-p)^{n-x}$, $x \in \{1, 2, \ldots\}$.
2. $p(x) = (1-p)p^{x-1}$, $x \in \{1, 2, \ldots\}$.
3. $p(x) = p(1-p)^{x-1}$, $x \in \{1, 2, \ldots\}$.

Bitte wenden!

d) Es seien A und B Ereignisse mit $P(A) > 0, P(B) > 0$. Wir nehmen an, dass $P(A|B) > P(A)$. Dann gilt:

1. $P(B|A) > P(B)$.
2. $P(A|B) = P(B|A)$.
3. $P(A) = P(B)$.

e) Es sei die Zufallsvariable X gegeben mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} c + x & -c \leq x \leq 0 \\ c - x & 0 \leq x \leq c \end{cases}$$

Bestimme die Konstante c.

1. $c = 2$.
2. $c = 1$.
3. $c = \frac{1}{2}$.

f) Gegeben sind i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Definiere $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Wie gross ist der Erwartungswert von

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu})^2?$$

1. σ^2.
2. μ^2.
3. $\frac{n-1}{n}\sigma^2$.

g) Wenn das Signifikanzniveau α eines Tests kleiner wird, dann

1. wird der Verwerfungsbereich für die Nullhypothese H_0 grösser.
2. wird das Vertrauensintervall grösser.
3. wird der P-Wert grösser.

h) Gegeben sind n Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$ von Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$. Wir nehmen an dass die X_i unabhängig und normalverteilt sind mit unbekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Varianz σ^2. Welcher Test ist geeignet um die Nullhypothese $H_0 : \mu = 5$ gegen die Alternative $H_A : \mu \neq 5$ zu testen?

1. t-Test.
2. z-Test.
3. Wilcoxon Test.

Es wird ein Test mit Nullhypothese $H_0 : \mu = 0$ und der Alternative $H_A : \mu \neq 0$ auf dem Signifikanzniveau α geführt. Betrachte die Funktion $g(\mu) = P(H_0 \text{ ablehnen}|\mu)$. Die Funktion g gibt die Wahrscheinlichkeit an, H_0 zu verwerfen, für verschiedene Werte des unbekannten wahren Parameters μ.

i) Wenn $\mu = 0$ ist, dann gilt

Siehe nächstes Blatt!

1. $g(\mu) > \alpha$.
2. $g(\mu) < 1 - \alpha$.
3. $g(\mu) \leq \alpha$.

j) Wenn $\mu \neq 0$, dann ist welche Aussage falsch?

1. $1 - g(\mu)$ ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art.
2. $1 - g(\mu)$ ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art.
3. $g(\mu)$ ist die Macht eines Tests.

Bitte wenden!

2. **(9 Punkte)** In einer Stadt gibt es zwei Taxiunternehmen: Eines besitzt 15 Taxis, die alle blau sind und das andere 85 Taxis, die alle grün sind. Wir sind bei Nacht an einer Strassenecke an der alle Taxis mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorbei kommen. Mittels eines Tests wird festgestellt, dass man bei Nacht ein blaues Taxi mit 80% Wahrscheinlichkeit als blaues Taxi erkennt und es mit 20% Wahrscheinlichkeit für ein grünes Taxi hält. Ein grünes Taxi erkennt man nur in 60% der Fälle als ein grünes und in 40% der Fälle hält man es für ein blaues.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erkennt man die Farbe eines Taxis bei Nacht nicht richtig?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit ein blaues Taxi zu beobachten?

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Taxi wirklich blau ist, wenn wir meinen ein blaues gesehen zu haben?

Es seien $0 \leq p, q \leq 1$. Nehmen Sie nun an, dass $100p\%$ der Taxis blau und $100(1-p)\%$ der Taxis grün sind. (Wie oben wird wieder angenommen, dass alle Taxis mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorbei kommen.) Nehmen Sie des Weiteren an, dass man mit $100q\%$ Wahrscheinlichkeit die Farbe eines Taxis richtig erkennt und mit $100(1-q)\%$ Wahrscheinlichkeit jeweils die andere Farbe sieht.

d) Finden Sie eine Bedingung an p und q, sodass ein Taxi mit grösserer Wahrscheinlichkeit blau ist als grün, wenn wir meinen ein blaues gesehen zu haben.

Siehe nächstes Blatt!

3. **(8 Punkte)** Die Zesalpina AG produziert Hochgeschwindigkeitszüge. Die Gesamtzeit T für die Produktion eines Zuges (in Tagen gemessen) ist exponentialverteilt mit Parameter $\frac{1}{100}$.

Anfang 2009 unterschreibt die SBB einen Liefervertrag für einen Zug mit der Zesalpina AG. Die beiden Parteien einigen sich auf eine Vertragsstrafe von $5000(T-100)$ Fr., falls die Produktion länger als 100 Tage dauert.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Vertragsstrafe bei der Herstellung eines Zuges fällig wird.

b) Berechnen Sie den erwarteten Betrag, den die Zesalpina AG für die Vertragstrafe bezahlen wird.

Im September 2009 kauft die Zesalpina AG neue Maschinen. Die Gesamtzeit T für die Produktion eines Zuges (in Tagen gemessen) ändert sich deshalb und wird exponentialverteilt mit einem unbekannten Parameter $\lambda > 0$.

Für die Produktion der letzten 10 Züge wurden die folgenden Herstellungszeiten beobachtet (in Tagen):

$$90 \quad 88 \quad 81 \quad 97 \quad 104 \quad 91 \quad 112 \quad 107 \quad 89 \quad 91.$$

c) Leiten Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter λ her und berechnen Sie seinen Wert für die gegebenen Beobachtungen.

Bitte wenden!

4. (8 Punkte) Es wird vermutet, dass ein neues Verfahren zum Drahtrichten die Zugfestigkeit des Drahtes erhöht. Es wird eine Stichprobe von 16 Drähten betrachtet und folgende Werte der Zugfestigkeit (in N/mm^2) gemessen:

Probe Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
Zugfestigkeit	2186	2139	2173	2163	2185	2176	2187	2156

Probe Nr.	9	10	11	12	13	14	15	16
Zugfestigkeit	2161	2190	2096	2145	2122	2149	2179	2185

Wir nehmen an, dass die Daten normalverteilt sind. Die durchschnittliche Zugfestigkeit von Draht gemäss dem alten Verfahren beträgt 2150.

a) Berechnen Sie das arithmetische Mittel $\bar{X}$ und die empirische Standardabweichung $\hat{\sigma}$ der Stichprobe.

b) Formulieren Sie die Null- und Alternativhypothese um die Behauptung zu testen, dass die durchschnittliche Zugfestigkeit mit dem neuen Verfahren grösser als 2150 ist. Welchen Test sollten Sie verwenden?

c) Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich zum 2.5%-Niveau. Wird die Nullhypothese verworfen?

Nehmen Sie für die folgende Aufgabe nun an, dass die Standardabweichung $\sigma = 30$ bekannt ist.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art für den Verwerfungsbereich $[2163, \infty)$ für $\bar{X}$, falls die wahre mittlere Zugfestigkeit nach dem neuen Verfahren 2160 beträgt.