Prof. Dr. M. Maathuis ETH Zürich Winter 2011

Stochastik - Musterlösung
(BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

1. a) 1 b) 2 c) 2 d) 1 e) 3 f) 3 g) 1 h) 2 i) 1 j) 1

2. Das Ereignis “zwei verschiedene Farben” wird mit zvF bezeichnet.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{zvF}|\text{Urne A}) &= \frac{2}{4}\frac{2}{3} + \frac{2}{4}\frac{2}{3} = \frac{2}{3}, \\
\mathbb{P}(\text{zvF}|\text{Urne B}) &= \frac{5}{6}\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\frac{5}{5} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{zvF}) &= \mathbb{P}(\text{zvF aus Urne A}) + \mathbb{P}(\text{zvF aus Urne B}) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\text{zvF}|\text{Urne A}) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(\text{zvF}|\text{Urne B}) = \frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{Urne A}|\text{zvF}) &= \frac{\mathbb{P}(\text{zvF aus Urne A})}{\mathbb{P}(\text{zvF})} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\text{zvF}|\text{Urne A})\mathbb{P}(\text{Urne A})}{\mathbb{P}(\text{zvF})} = \frac{\frac{1}{2}\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

d)

$$\mathbb{P}(\text{Urne A}|\text{zvF}) = \frac{p\frac{2}{3}}{p\frac{2}{3} + (1-p)\frac{1}{3}} = \frac{2p}{1+p}. \tag{1}$$

Wenn man (1) ableitet, bekommt man

$$\frac{d}{dp}\mathbb{P}(\text{Urne A}|\text{zvF}) = \frac{2}{(1+p)^2} > 0,$$

d.h. $\mathbb{P}(\text{Urne A}|\text{zvF})$ ist monoton steigend in p. Und da p zwischen 0 and 1 liegen muss, erreichen wir das Maximum von $\mathbb{P}(\text{Urne A}|\text{zvF})$ bei $p = 1$.

Anderer Weg: Wenn man $p = 1$ wählt, dann ist $\mathbb{P}(\text{Urne A}|\text{zvF}) = 1$, wählt man $p < 1$, dann ist klarerweise auch $\mathbb{P}(\text{Urne A}|\text{zvF}) < 1$. Also maximiert $p = 1$ diese Wahrscheinlichkeit.

Bitte wenden!

3. **a)** 1. N ist binomialverteilt mit den Parametern $p = 0.99$ und $n = 10000$ (N ist die Anzahl der "Erfolge" von n unabhängigen Experimenten mit Erforlgswahrscheinlichkeit 0.99).

2. Puppen mit zwei Armen im Schnitt pro Tag: $\mathbb{E}N = 10'000 \times 0.99 = 9900$

3. Die Standardabweichung ist $\sigma = \sqrt{\text{Var}N} = \sqrt{10'000 \times (0.01 \times 0.99)} = \sqrt{99} \approx 9.95$

b) 1. Sei $F_1 =$ "Fehler Maschine 1" und $F_2 =$ "Fehler Maschine 2". Gesucht wird $P(F_1 \cup F_2) = 1 - P(F_1^c \cap F_2^c)$, aufgrund der Unabhängigkeit von F_1 und F_2 ist $P(F_1^c \cap F_2^c) = P(F_1^c) \times P(F_2^c)$. Also $P(F_1 \cup F_2) = 1 - (1 - P(F_1)) \times (1 - P(F_2)) = 1 - 0.99 \times 0.999 = 0.01099 = 1.09\%$

c) 1. S ist geometrisch verteilt mit Parameter $p = 0.01099$ (S ist der erste "Erfolg" von unabhängigen Experimenten mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0.01099$ (von (c)).

2. $\{S > n\}$ ist das Ereignis, dass die ersten n Puppen in Ordnung sind, also wegen Unabhängingkeit $P(S > n) = P(\text{Puppe 1 in Ordnung})^n = (1-p)^n = 0.98901^n$.

d) 1. G ist geometrisch verteilt mit Parameter p, d. h. $P(G = n) = (1-p)^{n-1}p$. Also ist die Likelihood-Funktion für $X_1, ..., X_n$ gleich $\prod_{i=1}^n P(G = X_i) = (1-p)^{-n+\sum_{i=1}^n X_i} p^n$ bzw. die Log-Likelihood-Funktion $f(p) = \log(1-p)(-n + \sum_{i=1}^n X_i) + n\log(p)$. Wir haben $\frac{df}{dp} = -\frac{1}{1-p}(-n + \sum_{i=1}^n X_i) + \frac{n}{p}$ und

$$\begin{array}{rcll} \frac{df}{dp} & = & 0 & \Longleftrightarrow \\ \frac{n}{p} & = & \frac{1}{1-p}(-n + \sum_{i=1}^n X_i) & \Longleftrightarrow \\ 1-p & = & p(-1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i) & \Longleftrightarrow \\ 1 & = & p\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i & \Longleftrightarrow \\ p & = & \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)^{-1}. & \end{array}$$

Also maximiert $p = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i)^{-1}$ die Likelihood-Funktion, der Maximum-Likelihood-Schätzer ist somit gegeben durch $\hat{p} = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i)^{-1}$.

4. **a)** Die Daten sind

- normalverteilt

- mit (unbekanntem Mittelwert und) unbekannter Varianz,

wir werden also den t-Test wählen.

b) Wir wollen bestätigen, dass der tatsächliche Mittelwert μ kleiner als der vorgegebene Wert von $\mu_0 = 1ms$ ist, das heißt wir werden einen einseitigen Test zum Niveau $\alpha = 1\%$ mit den Hypothesen

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_A : \mu < \mu_0$

durchführen.

Siehe nächstes Blatt!

c) Wir führen einen linksseitigen Test durch, das Entscheidungskriterium zum Verwerfen der Nullhypothese ist daher $T \overset{?}{<} -t_{n-1,1-\alpha}$, wobei die Teststatistik T gegeben ist durch

$$T = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{992.8 - 1000}{321/\sqrt{10000}} = \frac{-7.2}{3.21} = -2.243,$$

das gesuchte t-Quantil ergibt sich für den sehr hohen Wert von $n = 10000$ aus der letzten Zeile der Tabelle (≥ 1000) mit $\alpha = 1\%$ zu $t_{9999,0.99} \approx t_{1000,0.99} = 2.33$. Wegen

$$-2.243 \not< -2.33$$

können wir die Nullhypothese nicht verwerfen und damit nicht bestätigen, dass der tatsächliche Mittelwert μ unter $1ms$ liegt.

d) Für das 95%-Vertrauensintervall brauchen wir zunächst das $1 - \frac{0.05}{2} = 0.975$-Quantil der Standardnormalverteilung, aus der entsprechenden Tabelle erhalten wir $\Phi^{-1}(0.975) = 1.96$, das Vertrauensintervall ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\left[\hat{\mu} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(0.975)\ ,\ \hat{\mu} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(0.975)\right] \\
&= \left[992.8 - \frac{300}{100}1.96\ ,\ 992.8 + \frac{300}{100}1.96\right] \mu s = [986.92, 998.68] \mu s.
\end{aligned}$$