Stochastik
(BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

Schreiben Sie für Aufgabe 2-4 stets alle Zwischenschritte und -rechnungen sowie Begründungen auf. Aufgabe 1 ist eine Multiple Choice Aufgabe (keine Begründungen notwendig).

Die für die Aufgaben benötigten Tabellen (Normalverteilung, Quantile der t-Verteilung, Vertrauensintervall für die Binomialverteilung, Verwerfungsbereiche für den Wilcoxon-Test) wurden mit der Prüfung ausgeteilt.

1. (10 Punkte)

Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig. Es gibt pro richtig beantwortete Frage 1 Punkt und pro falsche Antwort 1/2 Punkt Abzug. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte. **Bitte benützen Sie das beiliegende Antwortblatt.**

a) Seien A und B Ereignisse mit $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$ und $P(A \cap B) = 0.25$. Wie gross ist $P(B^c|A)$?

1. $P(B^c|A) = 0.5$.
2. $P(B^c|A) = 0.3875$.
3. $P(B^c|A) = 0.25$.

b) Seien X und Y zwei Zufallsvariablen welche nur die Werte $0, 1$ und 2 annehmen können. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion von (X, Y) ist veranschaulicht in folgender Tabelle (z.B. $P(X = 0, Y = 0) = p(0, 0) = 0.10$):

$X \setminus Y$	0	1	2
0	0.10	0.04	0.02
1	0.08	0.20	0.06
2	0.06	0.14	0.30

Sind X und Y unabhängig?

1. Ja.
2. Nein.

Bitte wenden!

3. Ist aus der Tabelle nicht ersichtlich.

c) Sei X eine Zufallsvariable mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 0.5x & \text{falls } |x-1| \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie gross ist $P(X \leq 1)$?

1. $P(X \leq 1) = 0.5$.
2. $P(X \leq 1) = 0.25$.
3. $P(X \leq 1) = 1$.

d) Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda = 2$. Dann ist der Erwartungswert von $Y = \exp(X)$

1. $\mathbb{E}[Y] = 2$.
2. $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}$.
3. $\mathbb{E}[Y] = e^{\frac{1}{2}}$.

e) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch und uniform auf dem Intervall $[-1, 1]$ verteilte Zufallsvariablen. Dann ist für grosse n die Verteilung der Summe $X_1 + \ldots + X_n$ näherungsweise normalverteilt mit

1. Erwartungswert $2n$ und Varianz $\frac{1}{3}n$.
2. Erwartungswert 0 und Varianz $\frac{2}{3}n^2$.
3. Erwartungswert 0 und Varianz $\frac{1}{3}n$.

f) Bei einem t-Test ist das Signifikanzniveau 5%. Wie gross ist die Macht des Tests?

1. 95%.
2. 5%.
3. Keine Aussage möglich.

g) Sei α die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1.Art, und β die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2.Art. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese abgelehnt wird, wenn die Alternative richtig ist,

1. $1 - \beta$.
2. $1 - \alpha$.
3. α.

Siehe nächstes Blatt!

h) Acht Personen nehmen an einem Hörtest teil. Man zählt die Anzahl der Worte, die die getestete Person mit dem rechten und mit dem linken Ohr gehört hat. Die folgenden Daten werden gemessen:

Teilnehmer Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
rechtes Ohr	32	30	8	32	20	32	27	30
linkes Ohr	25	29	10	31	27	24	24	26

Testen Sie zweiseitig auf dem 5%-Niveau die Hypothese "beide Ohren hören gleich gut" mit einem Wilcoxon-Test.

1. H_0 wird verworfen.
2. H_0 wird nicht verworfen.
3. Der Wilcoxon-Test ist nicht anwendbar, weil die Daten nicht normalverteilt sind.

i) Die Studenten, die an der Stochastik–Vorlesung teilnehmen, müssen ein bestimmtes Buch kaufen. Es sei p die Wahrscheinlichkeit, dass ein Student ein neues Buch kauft. Mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ wird ein gebrauchtes Buch gekauft.
Um p abzuschätzen, werden zufällig 100 Studenten interviewt. Es wurde festgestellt, dass 40 Studenten ein neues Buch kaufen.
Bestimmen Sie mit dem Diagramm ein 95% Vertrauensintervall für p.

1. $[0.30, 0.50]$.
2. $[0.32, 0.48]$.
3. $[0.34, 0.52]$.

j) Sei $(X_1, \ldots, X_n)$ die Stichprobe einer Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Sei $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, gegeben sind zwei verschiedene Punktschätzer für die Varianz, nämlich

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2 \qquad \text{sowie} \qquad \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2.$$

Dann gilt:

1. $\hat{\sigma}^2$ ist erwartungstreu.
2. $\tilde{\sigma}^2$ ist erwartungstreu.
3. Beide Schätzer sind nicht erwartungstreu.

Bitte wenden!

2. (9 Punkte)

Urne A enthält zwei schwarze und zwei weisse Kugeln, während Urne B hingegen fünf schwarze Kugeln und eine weisse Kugel enthält. Eine Urne wird zufällig mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt und daraus werden wieder zufällig zwei Kugeln *ohne Zurücklegen* gezogen (d.h. es wird eine Kugel gezogen, diese wird **nicht** in die Urne zurückgelegt, und dann wird eine weitere Kugel aus der selben Urne gezogen).

a)
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zwei Kugeln verschiedene Farben haben, falls sie aus Urne A gezogen wurden?
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zwei Kugeln verschiedene Farben haben, falls sie aus Urne B gezogen wurden?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zwei gezogenen Kugeln verschiedene Farben haben?

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Urne A gewählt wurde, wenn die beiden gezogenen Kugeln unterschiedliche Farben haben?

d) Wir nehmen jetzt an, dass Urne A mit Wahrscheinlichkeit p und Urne B mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ gewählt werden, wobei $0 \leq p \leq 1$. Welches p maximiert die Wahrscheinlichkeit, dass Urne A gewählt wurde, wenn die gezogenen Kugeln verschiedene Farben haben?

Siehe nächstes Blatt!

3. (9 Punkte) In einer Fabrik werden Puppen mittels zweier Maschinen produziert: In der ersten Maschine wird der Rohkörper erzeugt, welcher dann ohne Qualitätskontrolle gleich weiter zur zweiten Maschine geschickt wird, wo er dann gefärbt wird.

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Erzeugung des Rohkörpers ein Produktionsfehler auftritt und die erste Maschine einen Rohkörper mit nur einem Arm (anstatt zweier Arme) produziert, ist 1%. Derartige Produktionsfehler treten unabhängig voneinander auf. Pro Tag werden 10'000 Puppen produziert. Sei N die Anzahl der Puppen mit zwei Armen, die an einem Tag produziert werden. Welche Verteilung hat N? (Geben Sie sowohl die Art der Verteilung als auch den/die zugehörigen Parameter an.) Wie viele Puppen mit zwei Armen werden im Schnitt pro Tag produziert? Wie gross ist die Standardabweichung von N?

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Färbung des Rohkörpers ein Produktionsfehler auftritt und die zweite Machine einen Rohkörper mit der falschen Farbe färbt, ist 0.1%. Auch solche Fehler treten unabhängig voneinander auf und auch unabhängig davon ob in der ersten Maschine ein Fehler passiert ist oder nicht. Wie gross ist nun die Wahrscheinlichkeit eines Defekts (fehlender Arm und/oder falsche Farbe) für einen Rohkörper der aus der zweiten Maschine herauskommt?

c) Wir nehmen an, dass der erste Rohkörper die Seriennummer 1 hat, der zweite die Seriennummer 2, usw. Sei S die Serienummer des ersten defekten (fehlender Arm und/oder falsche Farbe) Rohkörpers, der aus der zweiten Maschine herauskommt. Wie ist S verteilt? (Geben Sie sowohl die Art der Verteilung als auch den/die zugehörigen Parameter an.) Berechnen Sie $P(S > n)$ für $n = 1, 2, \ldots$

d) Die Fabrik schafft eine neue Maschine an, welche Sommersprossen im Gesicht der Puppen malt. Die Anzahl der Sommersprossen auf den einzelnen Puppen ist dabei geometrisch verteilt mit Parameter p und voneinander unabhängig. Nehmen Sie an wir hätten n voneinander unabhängige Beobachtungen $X_1, \ldots, X_n$ der Anzahl von Sommersprossen. Leiten Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für p ab.

Bitte wenden!

4. (9 Punkte) Für ein grosses Netzwerk, bestehend aus etwa 100'000 Clients (Knoten) soll ein neues flexibleres Kommunikationssystem entwickelt werden, welches Nachrichten zwischen den verschiedenen Knoten übermitteln soll. Dabei ist es wichtig, dass die mittlere Übertragungsdauer μ zwischen den beiden strategisch wichtigen Knoten A und B für Datenpackete der Grösse $2kB$ möglichst klein ist. Es soll nun eine Software entwickelt werden, die in dieser Hinsicht mit 99%-iger Sicherheit besser als das alte System ist. Beim alten System waren A und B noch mit einer extra Standleitung verbunden wo die Übertragungsdauer μ praktisch ohne Streuung genau eine Millisekunde betrug.

Die damit beauftragte Technikerin testet ihr Programm, indem sie insgesamt 10'000 Nachrichten der Grösse $2kB$ gleichmässig verteilt über einen längeren Zeitraum hinweg (so dass man Unabhängigkeit annehmen kann) zwischen den beiden Knoten A und B verschickt und die dafür benötigten Zeiten misst. Sie erhält den empirischen Mittelwert $\hat{\mu} = 992.8\mu s$ und die empirische Streuung $\hat{\sigma} = 321\mu s$. Da jede Nachricht in mehrere Teile "zerhackt" wird, welche einzeln übertragen werden und dabei über eine grosse Anzahl von Knoten laufen deren Weiterleitungsdauern von vielen unabhängigen Faktoren beeinflusst wird, kann man annehmen, dass die Übertragungsdauer normalverteilt ist.

a) Welcher Test ist angebracht? Warum? (Geben Sie zwei Gründe an.)

b) Formulieren Sie die Null- und Alternativhypothese. Ist der Test ein- oder zweiseitig? Wie gross ist das Signifikanzniveau α?

c) Führen Sie den Test durch. Lässt sich mit dem Ergebnis bestätigen, dass die verlangten Vorgaben erreicht wurden?

d) Nehmen Sie nun an, dass die tatsächliche Streuung bei $\sigma = 300\mu s$ liegt und berechnen Sie das 95%-Vertrauensintervall für μ.