Stochastik - Lösungen

1. (10 Punkte)

a)	(i)	☒ wahr	☐ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
	(ii)	☐ wahr	☒ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
	(iii)	☐ wahr	☒ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
b)	(i)	☐ wahr	☒ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
	(ii)	☐ wahr	☒ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
	(iii)	☒ wahr	☐ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
c)	(i)	☐ wahr	☒ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
	(ii)	☒ wahr	☐ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
	(iii)	☐ wahr	☒ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
d)	(i)	☐ wahr	☒ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
	(ii)	☒ wahr	☐ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
	(iii)	☒ wahr	☐ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
e)	(i)	☐ wahr	☒ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
	(ii)	☒ wahr	☐ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
	(iii)	☒ wahr	☐ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
f)	(i)	☒ wahr	☐ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
	(ii)	☐ wahr	☒ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
g)	(i)	☐ wahr	☒ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
	(ii)	☒ wahr	☐ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**
	(iii)	☒ wahr	☐ nicht wahr	**(0.5 Pkt)**

2. (9 Punkte)

a) Wir betrachten

$$\Omega = \{(x, y, z)\colon x, y, z \in \{1, 2, 3, 4, 5, \text{Joker}\}\}$$

und für die Gewinnereignisse

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(\text{Joker}, \text{Joker}, \text{Joker})\} \\ G_2 &= \{(x, x, x)\colon x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\} \\ G_3 &= \{(\text{Joker}, \text{Joker}, z)\colon z \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\} \\ &\quad \cup \{(\text{Joker}, y, \text{Joker})\colon y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\} \\ &\quad \cup \{(x, \text{Joker}, \text{Joker})\colon x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216, \quad |G_1| = 1, \quad |G_2| = 5, \quad |G_3| = 3 \cdot 5 = 15.$$

Und wir erhalten die Gewinnwahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[G_1] &= 1/216 \approx 0.463\%, && \textit{(0.5 Pkt)} \\ \mathbb{P}[G_2] &= 5/216 \approx 2.315\%, && \textit{(0.5 Pkt)} \\ \mathbb{P}[G_3] &= 15/216 \approx 6.944\%. && \textit{(0.5 Pkt)} \end{aligned}$$

Zusätzlich 0.5 Pkt für korrekt aufgeschriebene Lösung.

Gesamtpunktzahl der Teilaufgabe **a)**: **(2 Pkt)**

Alternativ: Seien X, Y, Z die Zufallsvariablen, die das Resultat im ersten, zweiten und dritten Fenster beschreiben. Dann sind X, Y und Z unabhängig und identisch verteilt mit uniformer Verteilung auf $\{1, 2, 3, 4, 5, \text{Joker}\}$.

Die Gewinnkategorie ($G1$) tritt ein, wenn $X = Y = Z = \text{Joker}$, also mit Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[X = Y = Z = \text{Joker}] = \mathbb{P}[X = \text{Joker}]^3 = 6^{-3} = 1/216 \approx 0.463\%.$$

Hierbei wurde die iid Eigenschaft genutzt. **(0.5 Pkt)**

($G2$) tritt ein, wenn $X = Y = Z \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, also mit Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[X = Y = Z \in \{1, 2, 3, 4, 5\}] = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}[X = i]^3 = 5/216 \approx 2.315\%.$$

(0.5 Pkt)

($G3$) tritt ein, wenn $X = Y = \text{Joker}$ und $Z \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oder wenn $X = Z = \text{Joker}$ und $Y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oder wenn $Y = Z = \text{Joker}$ und $X \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Da X, Y und Z unabhängig und identisch verteilt sind, tritt ($G3$) ein mit Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[(G3)] &= 3\mathbb{P}[X = Y = \text{Joker}, Z \in \{1, 2, 3, 4, 5\}] = \\ &= 3 \cdot \mathbb{P}[X = \text{Joker}]^2 \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}[Z = i] = 3 \cdot 5/216 \approx 6.944\%. \end{aligned}$$

(0.5 Pkt)

Zusätzlich für korrekte Lösung: **(0.5 Pkt)**

b) Sei X die Zufallsvariable die den Auszahlungsbetrag beschreibt. Dann haben wir

$$\mathbb{E}[X] = 5 \cdot \frac{15}{216} + 15\frac{5}{216} + 50\frac{1}{216} = \frac{200}{216}.$$

(1 Pkt)

Der erwartete Gewinn ist dann $\mathbb{E}[G] = \mathbb{E}[X-1] = \frac{-16}{216} \approx -0.074$ **(0.5 Pkt)**

c) Wir betrachten die Ereignisse:

$$\begin{aligned} R \ldots &\text{ roter Automat hat Gewinnwahrscheinlichkeit } 5\%, \\ B \ldots &\text{ blauer Automat hat Gewinnwahrscheinlichkeit } 5\%, \\ NJ \ldots &\text{ kein Gewinn.} \end{aligned}$$

A priori gehen wir von den Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}[R] = \mathbb{P}[B] = 0.5$$

aus. Des Weiteren wissen wir

$$\mathbb{P}[NJ|R] = 0.95, \quad \mathbb{P}[NJ|B] = 0.98$$

Es gilt dann mit dem Satz von Bayes und der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[R|NJ] = \frac{\mathbb{P}[NJ|R]\mathbb{P}[R]}{\mathbb{P}[NJ]} = \frac{\mathbb{P}[NJ|R]\mathbb{P}[R]}{\mathbb{P}[NJ|R]\mathbb{P}[R] + \mathbb{P}[NJ|B]\mathbb{P}[B]}.$$

(1 Pkt)

Also,

$$\mathbb{P}[R|NJ] = \frac{0.95}{0.95 + 0.98} \approx 49.2\%.$$

(1 Pkt)

d) Sei NJ^k das Ereignis, in k-Spielrunden keinen Joker zu haben. Wir wissen dann, dass

$$\mathbb{P}[NJ^k|R] = 0.95^k, \quad \mathbb{P}[NJ^k|B] = 0.98^k.$$

Wie oben ist $\mathbb{P}[R] = \mathbb{P}[B] = 0.5$ und mit dem Satz von Bayes und der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[R|NJ^k] = \frac{\mathbb{P}[NJ^k|R]\mathbb{P}[R]}{\mathbb{P}[NJ^k]} = \frac{\mathbb{P}[NJ^k|R]\mathbb{P}[R]}{\mathbb{P}[NJ^k|R]\mathbb{P}[R] + \mathbb{P}[NJ^k|B]\mathbb{P}[B]}.$$

(1 Pkt)

Also,

$$\mathbb{P}[R|NJ^k] = \frac{0.95^k}{0.95^k + 0.98^k}$$

(1 Pkt)

e) Wir suchen das kleinste k, sodass

$$\frac{0.95^k}{0.95^k + 0.98^k} < 0.2$$

(0.5 Pkt)

Es gilt

$$\frac{0.95^k}{0.95^k + 0.98^k} = \frac{1}{1 + (0.98/0.95)^k} \approx \frac{1}{1 + 1.032^k}.$$

Also suchen wir das kleinste k, sodass

$$(0.98/0.95)^k > \frac{1}{0.2} - 1 = 4.$$

Wir nehmen auf beiden Seiten den Logarithmus und erhalten

$$k > \frac{\log(4)}{\log(0.98) - \log(0.95)} \approx 44.6$$

(0.5 Pkt)

Wir müssen also mindestens $\underline{45}$ mal spielen und keinen Jackpot erhalten, damit die Wahrscheinlichkeit, dass der rote Automat die höhere Rate hat unter 20% sinkt. **(0.5 Pkt)**

3. (10 Punkte)

a) Für $i = 1, ..., 1003$ sei Y_i die Menge an tatsächlich versendetem Mehl. Es gilt $Y_i \sim U([9,11])$ und damit $\mathbb{E}[Y_i] = 10$ und $Var(Y_i) = 4/12 = 1/3$. **(0.5 Pkt)**
Wir nehmen an, dass alle Y_i unabhängig und identisch $U([9,11])$-verteilt sind. **(1 Pkt)**
Dann ist $X := \sum_{i=1}^{1003} Y_i$ nach dem zentralen Grenzwertsatz $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$-verteilt, wobei **(0.5 Pkt)**

$$\mu_X = 1003 \cdot 10 = 10'030, \quad \sigma_X = \sqrt{1003/3} \approx 18.28$$

bzw. $\sigma_X^2 = 1003/3 = 334.\overline{3}$. **(0.5 Pkt)**

b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X \geq 10'000] &= \mathbb{P}\left[\frac{X - 10'030}{\sigma_X} \geq \frac{-30}{\sigma_X}\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\frac{X - 10'030}{\sigma_X} \leq \frac{30}{\sigma_X}\right] \qquad \textit{(1 Pkt)} \\ &\approx \Phi(1.64) = 94.95\%,\end{aligned}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist. **(2 Pkt)**

c) Es gilt, dass $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ also mit $n = 52$: $\bar{X}_{52} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/52)$ **(0.5 Pkt)**

und $S_n \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$,
also mit $n = 52$: $S_{52} \sim \mathcal{N}(52\mu, 52\sigma^2)$ **(0.5 Pkt)**

d) (i) Für m Beobachtungen x_1,... x_m und Varianz σ^2 ist der Maximum-Liklihood-Schätzer für μ, der Wert $\hat{\mu}$, welcher

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^{m} f_{\mu,\sigma}(x_i)$$

maximiert, wobei $f_{\mu,\sigma}$ die Dichte der $N(\mu, \sigma^2)$-Verteilung ist. Äquivalent können wir hier die log-Likelihood-Funktion

$$l(\mu) = \log((L(\mu)) = \frac{m}{2}\log(2\pi\sigma) - \sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu)^2/(2\sigma^2)$$

verwenden **(1 Pkt)**
Leiten wir beide Seiten nach μ ab, ergibt das

$$\frac{d}{d\mu}l(\mu) = 2\sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu)/(2\sigma^2).$$

Durch 0-setzen des Terms erhalten wir nun den Maximum-Likelihood-Schätzer

$$\hat{\mu} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i = \bar{x}_m.$$

(1 Pkt)

Mit $m = 12$ und den Daten aus der Tabelle erhalten wir

$$\hat{\mu} = \bar{x}_m = 10'019.5$$

(1 Pkt)

(ii) Hier gilt $\sigma = 20$, $\alpha = 0.05$. Das Vertrauensintervall ist nun gegeben als

$$I = [\bar{X}_m - z_{0.975}\sigma/\sqrt{m}, \bar{X}_m + z_{0.975}\sigma/\sqrt{m}].$$

(1 Pkt)

Mit den Daten aus den ersten 12 Lieferungen und $\bar{X}_m = \bar{x}_m$ erhalten wir das Vertrauensintervall

$$[10'008.2, 10'030.8].$$

(0.5 Pkt)

4. (10 Punkte)

a) (i) Es sei X_i die Differenz der Messwerte zwischen Messgerät A und Messgerät B and Ort i, wobei $i = 1, ..., 11$. Die Modellannahme ist, dass X_i unabhängig und normalverteilt sind mit Parametern μ und σ^2, für $i = 1, ..., 11$. **(1 Pkt)**

Alternativ: A_i und B_i Messung von Messgerät A und B and Ort i. Die Annahme ist dann, dass A_i und B_i unabhängig sind iid $N(\mu_A, \sigma^2)$ und $N(\mu_B, \sigma^2)$-verteilt für $i = 1, ..., 11$. Damit ist auch die Differenz normalverteilt, mit Parameter $\mu = \mu_A - \mu_B$ und Varianz $2\sigma^2$.

(ii) $H_0 : \mu = 0$, $H_A : \mu > 0$. **(0.5 Pkt)**
Die Test-Statistik ist

$$T = \sqrt{n}\bar{X}_n / S_n,$$

wobei $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ und $S_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$, mit $n = 11$. **(1 Pkt)**

(iii) Aus den Daten aus der Tabelle erhalten wir mit $n = 11$

$$t = \sqrt{n}\frac{\bar{x}_n}{s_n} = \sqrt{11}\frac{1.04}{1.41} \approx 2.45.$$

(0.5 Pkt)

Unter H_0 gilt $T \sim t_{n-1}$ und der p-Wert ist gegeben als $\mathbb{P}[T \geq t]$. Aus der Tabelle wissen wir, dass $t_{10,0.99} = 2.764$ und somit

$$\mathbb{P}[T \geq t] > \mathbb{P}[T \geq t_{10,0.99}] = 0.01.$$

(1 Pkt)

Damit kann die Nullhypothese nicht verworfen werden. **(0.5 Pkt)**

b) (i) Für den Vorzeichentest nehmen wir an, dass X_i iid sind und einer stetigen Verteilung mit Median μ folgen. **(1 Pkt)**

(ii) $H_0 : \mu = 0$, $H_A : \mu > 0$. **(0.5 Pkt)**
Die Teststatistik ist

$$V = \#\{1 \leq i \leq n | X_i > 0\}.$$

(1 Pkt)

(iii) Die Anzahl der positiven Vorzeichen ist $v = 10$. Für den einseitigen Test, haben wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[V = 11 | p = 0.5] &= 0.5^{11} \approx 0.0005 \\
\mathbb{P}[V \geq 10 | p = 0.5] &= 110.5^{11} + 0.5^{11} = 120.5^{11} \approx 0.006 \\
\mathbb{P}[V \geq 9 | p = 0.5] &= \mathbb{P}[V = 9 | p = 0.5] + \mathbb{P}[V \geq 10 | p = 0.5] \\
&= 11 \cdot 5 \cdot 0.5^{11} + 12 \cdot 0.5^{11} \approx 0.033 > 0.01
\end{aligned}$$

(1.5 Pkt)

Damit liegt der Verwerfungsbreich bei $K = 10, 11$ und die Nullhypothese wird verworfen. **(0.5 Pkt)**

c) Die Macht ist hier gegeben als

$$\mathbb{P}[\text{Test verwirft } H_0 | p = 0.7] = \mathbb{P}[V \geq 10 | p = 0.7] = 11 \cdot 0.7^{10} \cdot 0.3 + 0.7^{11} \approx 0.113$$

Die Macht des Tests bei $p = 0.7$ beträgt also 11.3%. **(1 Pkt)**