Stochastik - Lösung (BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

1. (6 Punkte)

a) (1.5 Punkte) Wir definieren die Ereignisse $D = \{\text{die Nähmaschine bekommt einen kleinen Defekt}\}$ und $U = \{\text{die Nähmaschine ist unbrauchbar}\}$. Laut Aufgabenstellung gilt $P(D) = 0.3$, $P(U|D) = 0.75$ und $P(U|D^c) = 0.4$. Der Satz der totalen Wahrscheinlichkeit liefert

$$\begin{aligned}P(U) &= P(U \cap \Omega) = P(U \cap (D \cup D^c)) = P(U \cap D) + P(U \cap D^c)\\ &= P(U|D)P(D) + P(U|D^c)P(D^c) = P(U|D)P(D) + P(U|D^c)(1 - P(D))\\ &= 0.75 \times 0.3 + 0.4 \times 0.7 = 0.505\,.\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Nähmaschine, die mehr als 5 Jahre alt ist, unbrauchbar ist, ist 50.5%.

b) (1.5 Punkte)

$$P(D^c|U) = \frac{P(D^c \cap U)}{P(U)} = \frac{P(U|D^c)P(D^c)}{P(U)} = \frac{P(U|D^c)(1 - P(D))}{P(U)} = \frac{0.4 \times 0.7}{0.505} = 0.554\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Nähmaschine, die unbrauchbar ist, nie einen Ausfall gehabt hat, ist 55.4%.

c) (1 Punkt) Es beschreibe die Zufallsvariable X die Gesamtzahl der Nähmaschinen, die innerhalb von 5 Jahren einen kleinen Defekt haben. Dann gilt $X \sim \mathrm{Bin}(n = 10, p = 0.3)$. Die Wahrscheinlichkeit, dass keine Nähmaschine einen kleinen Defekt hat, ist also gegeben durch $P(X = 0) = (1 - p)^n = 0.7^{10} = 0.028 = 2.8\%$.

d) (1 Punkt) Es beschreibe die Zufallsvariable Z die Gesamtzahl der Nähmaschinen, die innerhalb von 5 Jahren komplett ausfallen. Dann gilt $Z \sim \mathrm{Bin}(n = 10, p = 0.505)$. Also sind die Gesamtkosten $Y = 600 \times 10 + 600Z = 600(10 + Z)$. Die durchschnittlichen Gesamtkosten sind gegeben durch den Erwartungswert der Zufallsvariablen Y, also $E(Y) = E(600(10+Z)) = 600(10+E(Z)) = 600(10+np) = 600(10+10 \times 0.505) = 9030$.

e) (1 Punkt) Die Wahrscheinlichkeit, dass das Budget überschritten wird, ist gegeben durch

$$\begin{aligned}P(Y > 6600) &= P(600(10 + Z) > 6600) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1)\\ &= 1 - P(Z = 0) - P(Z = 1) = 1 - \binom{10}{0} p^0(1 - p)^{10} - \binom{10}{1} p^1(1 - p)^9\\ &= 1 - (0.495)^{10} - 10 \times 0.505 \times (0.495)^9 = 0.99 = 99\%\,.\end{aligned}$$

2. (6 Punkte)

a) (1 Punkt)

$$f_X(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy = 8x1_{\{0\leq x\leq 1\}} \int\limits_0^x y dy = 8x1_{\{0\leq x\leq 1\}} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x = 4x^3 1_{\{0\leq x\leq 1\}} \,.$$

b) (1 Punkt) Die Wahrscheinlichkeit, dass der Küchenchef weniger als a hg für eine Pizza verwendet, ist gegeben durch

$$P(X \leq a) = F(a) = \int\limits_{-\infty}^{a} f_X(x)dx = \int\limits_0^a 4x^3 1_{\{0\leq x\leq 1\}} dx = a^4 1_{\{a\leq 1\}} + 1_{\{a>1\}} \,.$$

Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Küchenchef weniger als 50 g = 0.5 hg für eine Pizza verwendet, gegeben durch $P(X \leq 0.5) = (0.5)^4 = 0.0625 = 6.25\%$.

c) (1 Punkt) Die Wahrscheinlichkeit, dass der Küchenchef δ mal soviel Mozzarella wie Tomatensauce für eine Pizza verwendet, wobei $\delta > 1$, ist wegen $\{y \leq x\} \cap \{x > \delta y\} = \{y < \frac{x}{\delta}\}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} P(X > \delta Y) &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} 1_{\{x>\delta y\}} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int\limits_{\mathbb{R}^2} 8xy1_{\{0\leq x\leq 1\}}1_{\{0\leq y\leq x\}}1_{\{x>\delta y\}}dxdy \\ &= \int\limits_0^1 8x \left(\int\limits_0^{\frac{x}{\delta}} y dy\right) dx = \int\limits_0^1 8x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\frac{x}{\delta}} dx = \frac{4}{\delta^2}\int\limits_0^1 x^3 dx = \frac{1}{\delta^2} \,. \end{aligned}$$

Wir suchen $\delta > 1$, so dass gilt $P(X > \delta Y) = \frac{1}{9}$. Daraus folgt, dass $\delta = \sqrt{9} = 3$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{9} = 11.1\%$ verwendet der Küchenchef dreimal soviel Mozzarella wie Tomatensauce.

d) (1 Punkt) Die erwartete Quotient zwischen Mozzarella und Tomatensauce für eine Pizza ist gegeben durch

$$E\left(\frac{X}{Y}\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{x}{y} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 8x^2 \left(\int\limits_0^x dy\right) dx = \int\limits_0^1 8x^3 dx = 2 \,.$$

Im Durchschnitt verwendet der Küchenchef zweimal soviel Mozzarella wie Tomatensauce.

e) (1 Punkt) Wir berechnen die bedingte Verteilung von Y gegeben $X = x$ für $x > 0$. Das ist

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{8xy1_{\{0<x\leq 1\}}1_{\{0\leq y\leq x\}}}{4x^3 1_{\{0<x\leq 1\}}} = 2x^{-2}y1_{\{0\leq y\leq x\}}$$

für $x > 0$. Wir berechnen den bedingten Erwartungswert von Y gegeben $X = a \leq 1$ mit $\alpha > 0$ als

$$E(Y|X = a) = \int\limits_{\mathbb{R}} y f_{Y|X=a}(y)dy = \int\limits_0^a 2a^{-2}y^2 dy = \frac{2}{3}a \,.$$

Wenn der Küchenchef schon 70 g = 0.7 hg Mozzarella für eine Pizza verwendet hat, so ist die erwartete Menge von Tomatensauce $E(Y|X{=}0.7) = \frac{2}{3}{\times}0.7$ hg $= 0.47$ hg $= 47$ g.

f) (1 Punkt) Die Dichte von Y für $0 \leq y \leq 1$ ist

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_y^1 8xydx = 4y(1-y^2)1_{\{0\leq y\leq 1\}}\,.$$

Also gilt

$$f_{X,Y}(x,y) = 8xy1_{\{0\leq x\leq 1\}}1_{\{0\leq y\leq x\}} \neq 4x^3 1_{\{0\leq x\leq 1\}}4y(1-y^2)1_{\{0\leq y\leq 1\}} = f_X(x)f_Y(y)\,,$$

d.h. X und Y sind nicht unabhängig.

3. (6 Punkte)

a) (1.5 Punkte) Wir suchen α so, dass das s-te theoretische Moment von X, definiert als $\mu_s = E(X^s)$, und das s-te empirische Moment von $x_1, \ldots, x_n$, definiert als $m_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^s$, übereinstimmen. Also haben wir für $s = 1, 2$

$$\begin{cases} \mu_1(\alpha,\lambda) = m_1 \\ \mu_2(\alpha,\lambda) = m_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E(X) = m_1 \\ E(X^2) = m_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E(X) = m_1 \\ \mathrm{Var}(X) + E(X)^2 = m_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{\lambda} = m_1 \\ \frac{\alpha+\alpha^2}{\lambda^2} = m_2 \end{cases}$$

Durch Ersetzen von α in der zweiten Gleichung bekommen wir $\lambda = \frac{m_1}{m_2 - m_1^2}$ und $\alpha = \frac{m_1^2}{m_2 - m_1^2}$. Dies führt zum Momentenschätzer

$$\hat{\lambda}_{MoM} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)^2} = \frac{\overline{X}_n}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \overline{X}_n^2}\,,$$

$$\hat{\alpha}_{MoM} = \frac{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)^2} = \frac{\overline{X}_n^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \overline{X}_n^2}\,.$$

b) (1.5 Punkte) Da die Beobachtungen unabhängig sind, können wir die Likelihoodfunktion schreiben als $L(x_1, \ldots, x_n, \alpha, \lambda) = \prod_{i=1}^n f_{\alpha,\lambda}(x_i)$. Die log-Likelihoodfunktion ist

$$\begin{aligned} l(x_1, \ldots, x_n, \alpha, \lambda) &= \log L(x_1, \ldots, x_n, \alpha, \lambda) = \sum_{i=1}^n \log f_{\alpha,\lambda}(x_i) = \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} e^{-\lambda x_i}\right) \\ &= n\alpha\log\lambda - n\log\Gamma(\alpha) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^n \log x_i - \lambda\sum_{i=1}^n x_i\,. \end{aligned}$$

Die Ableitung der log-Likelihoodfunktion ist $\dfrac{\partial l(x_1, \ldots, x_n, \alpha, \lambda)}{\partial\lambda} = \dfrac{n\alpha}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i$. Also haben wir, dass $\dfrac{\partial l(x_1, \ldots, x_n, \alpha, \lambda)}{\partial\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{n\alpha}{\sum_{i=1}^n x_i}$. Da die zweite Abteilung $\dfrac{\partial l^2(x_1, \ldots, x_n, \alpha, \lambda)}{\partial\lambda^2} = -\dfrac{n\alpha}{\lambda^2}$ negativ ist, schliessen wir daraus, dass λ ein Maximum ist. Der gesuchte Maximum-Likelihood-Schätzer ist also

$$\hat{\lambda}_{MLE} = \frac{n\alpha}{\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{\alpha}{\overline{X}_n}\,.$$

c) (1.5 Punkte) Wir nehmen an, dass die N Kernkraftwerke unabhängig voneinander sind. Eine zweite Annahme ist, dass N gross genug ist, damit die Normalverteilung via den zentralen Grenzwertsatz eine gute Approximation liefert. Wir wenden also den zentralen Grenzwertsatz an. Laut dem ZGS ist $\overline{X}_N$ approximativ $\mathcal{N}(\mu_{X_1}, \frac{\sigma^2_{X_1}}{N})$-verteilt mit $\mu_{X_1} = E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$ und $\sigma^2_{X_1} = \text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die durchschnittliche Lebensdauer der N Kernkraftwerke die Höchstgrenze A überschreitet, ist also approximativ gegeben durch

$$\begin{aligned}
P(\overline{X}_N > A) &= 1 - P(\overline{X}_N \leq A) = 1 - P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu_{\bar{X}_N}}{\sigma_{\bar{X}_N}} \leq \frac{A - \mu_{\bar{X}_N}}{\sigma_{\bar{X}_N}}\right) \\
&\approx 1 - P\left(Z \leq \frac{A - \mu_{\bar{X}_N}}{\sigma_{\bar{X}_N}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{N}(A - \mu_{X_1})}{\sigma_{X_1}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{N}\left(A - \frac{\alpha}{\lambda}\right)}{\sqrt{\alpha/\lambda^2}}\right) = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{N}{\alpha}}\lambda\left(A - \frac{\alpha}{\lambda}\right)\right).
\end{aligned}$$

d) (1.5 Punkte) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Differenz zwischen der durchschnittlichen Lebensdauer der N Kernkraftwerke und der erwarteten Lebensdauer eines Kernkraftwerks höchstens 1 Jahr beträgt, ist approximativ gegeben durch

$$\begin{aligned}
P(|\overline{X}_N - \mu_{X_1}| \leq 1) &\approx P\left(\left|Z\frac{\sigma_{X_1}}{\sqrt{N}}\right| \leq 1\right) = P\left(-\frac{\sqrt{N}}{\sigma_{X_1}} \leq Z \leq \frac{\sqrt{N}}{\sigma_{X_1}}\right) \\
&= P\left(Z \leq \frac{\sqrt{N}}{\sigma_{X_1}}\right) - P\left(Z \leq -\frac{\sqrt{N}}{\sigma_{X_1}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\sqrt{N}}{\sigma_{X_1}}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{N}}{\sigma_{X_1}}\right) \\
&= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{N}}{\sigma_{X_1}}\right) - 1\,.
\end{aligned}$$

Wir suchen N, so dass approximativ gilt

$$\begin{aligned}
P(|\overline{X}_N - \mu_{X_1}| \leq 1) \geq 0.95 \Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{\sqrt{N}}{\sigma_{X_1}}\right) - 1 \geq 0.95 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{N} \geq \Phi^{-1}(0.975)\sigma_{X_1} \\
&\Leftrightarrow \quad N \geq \left(\Phi^{-1}(0.975)\right)^2 \frac{\alpha}{\lambda^2}\,.
\end{aligned}$$

Wegen $\Phi^{-1}(0.975) = 1.96$ sollte Frankreich approximativ mindestens $\lceil 3.84\frac{\alpha}{\lambda^2}\rceil$ Kernkraftwerke haben.

4. (6 Punkte) Seien $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ die Zahl der Chips in Paket i, die fehlerhaft sind, und wie immer die tatsächlich gemessenen Werte $x_1, \ldots, x_{10}$ Realisierungen davon. Der Parameter μ soll getestet werden. Da die Standardabweichung σ unbekannt ist, muss sie aus den Daten geschätzt werden, was uns zum t-Test führt.

a) **(1 Punkt)** Mit $t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{9;0.975} = 2.26$ ergibt sich die Realisierung des 95%-Vertrauensintervalls zu $I_{95\%} = \left[\overline{x}_{10} - t_{9,0.975}\frac{s_{10}}{\sqrt{10}}\ ,\ \overline{x}_{10} + t_{9,0.975}\frac{s_{10}}{\sqrt{10}}\right] = [26.01, 31.99]$.

b) **(1 Punkt)** Wir wollen wissen, ob mehr als 2.5% der Chips fehlerhaft sind, d.h. ob μ grösser als 25 ist. Dazu führen wir einen *nach oben einseitigen* Test zum Niveau 1% mit Null- und Alternativhypothese $H_0 : \mu = \mu_{:} = 25$ und $H_A : \mu > \mu_0$ durch. Der Verwerfungsbereich ist somit gegeben durch $K = [t_{n-1,1-\alpha}, \infty) = [t_{9,0.99}, \infty) = [2.821, \infty)$. Die Realisierung der Teststatistik ist

$$t = \sqrt{10}\frac{\overline{x}_{10} - \mu_0}{s_{10}} = \sqrt{10}\frac{29 - 25}{4.19} = 3.02 \in K\,,$$

weshalb die Nullhypothese verworfen wird.

c) **(1 Punkt)** Wir suchen das Niveau α, das gerade den Verwerfungsbereich $[3.02, \infty)$ hat; das heisst, wir suchen das Niveau α, für das $t_{n-1,1-\alpha} = 3.02$ gilt. Durch Rückwärtsauslesen aus der Tabelle der t-Quantile sieht man lediglich, dass der Wert zwischen 1% und 0.5% liegen muss (linear interpoliert bekommt man 0.77%). Dieses Niveau heisst P-Wert.

Wenn $\sigma = 4.2$ bekannt ist, verwenden wir jetzt den z-Test. Der einzige Unterschied ist, dass die Quantile der t-Verteilung durch jene der Standardnormalverteilung und die geschätzte Streuung durch die tatsächliche Streuung ersetzt werden.

d) **(1 Punkt)** $K = [z_{1-\alpha}, \infty) = [z_{0.99}, \infty) = [2.326, \infty)$.

Die Teststatistik lautet nun $Z = \sqrt{10}\frac{\overline{X}_{10}-\mu_0}{\sigma}$, und ihre Realisierung ist gegeben durch

$$z = \sqrt{10}\frac{\overline{x}_{10} - \mu_0}{\sigma} = \sqrt{10}\frac{29 - 25}{4.20} = 3.01 \in K\,.$$

Also wird H_0 auch hier verworfen.

e) **(1 Punkt)** Wegen $Z \sim \mathcal{N}\left(\sqrt{n}\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}, 1\right)$ ist $Z \overset{\mu=26}{\sim} \mathcal{N}(0.753, 1)$, und somit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2.Art zu

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mu=26}(Z \notin K) = \mathbb{P}_{\mu=26}(Z < 2.326) &= F_{\mathcal{N}(0.753,1)}(2.326) = \Phi(2.326 - 0.753)\\ &= \Phi(1.573) = 0.9421 \approx 94\%,\end{aligned}$$

was ziemlich hoch ist.

f) **(1 Punkt)** Die Breite des Vertrauensintervalls ist $2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.995}$. Somit ergibt sich die Bedingung $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.995} < 1$ und weiter $\sqrt{n} > \sigma z_{0.995} = 4.2 \times 2.576 = 10.82$ bzw. $n > 10.82^2 = 117.05$, d.h. n sollte mindestens 118 sein.

Die Frage ist nun, wie gross $\overline{x}_{118}$ sein muss, damit $z = \sqrt{118}\frac{\overline{x}_{118}-25}{4.2} \geq 2.326$ gilt. Diese Bedingung ist äquivalent zu $\overline{x}_{118} \geq 2.326\frac{4.2}{\sqrt{118}} + 25 = 25.90$. Bei einem Stichprobenumfang von $n = 118$ würde also bereits ein empirisch gemessener Mittelwert von 25.90 zum einseitigen Verwerfen der Nullhypothese führen.

5. (6 Punkte)

a) **(0.5 Punkte)** Die Stichprobe ist gepaart. Es geht um die gleichen Videos, mit zwei unterschiedlichen Werbungen.

b) **(0.5 Punkte)** Wir können nicht sagen, dass die Verteilung eine Normalverteilung ist. Wir können mit einem QQ-Plot besser beurteilen, ob eine Normalverteilung vorliegt oder nicht.

c) **(1 Punkt)** Sei $D_i = X_i - Y_i$, wobei X_i die durchschnittliche Zeit der Wiedergabe des i-ten Videos mit der Werbung A sei, und Y_i die durchschnittliche Zeit der Wiedergabe des i-ten Videos mit der Werbung B. Wir wollen testen, ob die durchschnittlichen Zeiten der Wiedergabe der Videos bei den zwei Werbungen unterscheiden. Es gibt keine Annahme der Normalverteilung. Die Voraussetzungen für den entsprechenden Wilcoxon-Test sind daher, dass die D_i unabhängig und identisch verteilt, mit einer um den Mittelwert μ symmetrischen stetigen Verteilung, sind. Für den t-Test kommt hinzu, dass die D_i normalverteilt sein müssen. Für den Vorzeichentest würde man die Symmetrie nicht brauchen, sondern nur, dass der Median Null ist. Daher ist der Wilcoxon-Test am besten geeignet um die gegebenen Informationen bestmöglich auszunutzen.

d) **(1.5 Punkte)** Wir wollen herausfinden, ob der Mittelwert μ der Differenzen $D_i = X_i - Y_i$ ungleich 0 ist. Dazu führen wir einen zweiseitigen Test zum Niveau 5% mit Null- und Alternativhypothese $H_0 : \mu = 0$ und $H_A : \mu \neq 0$ durch. Der Verwerfungsbereich ist somit gegeben durch $K = \{W \leq \ell\} \cup \{W \geq u\} = \{W \leq 8\} \cup \{W \geq 47\}$. Wir berechnen die entsprechenden Ränge $\text{Rang}(|d_i|)$ und die V_i-Indikatoren.

Werbung A (x_i)	156	155	162	160	159	165	160	164	163	168
Werbung B (y_i)	149	151	159	158	160	165	162	170	170	175
$d_i = x_i - y_i$	7	4	3	2	-1	0	-2	-6	-7	-7
$\text{Rang}(\lvert d_i\rvert)$	9	6	5	3.5	2	1	3.5	7	9	9
v_i	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

Die Realisierung der Teststatistik ist

$$w = \sum_{i=1}^{10} \text{Rang}(|d_i|) v_i = 9 + 6 + 5 + 3.5 = 23.5 \notin K\,,$$

weshalb die Nullhypothese nicht verworfen wird. Es kann also nicht nachgewiesen werden, dass sich die durchschnittlichen Zeiten der Wiedergabe der Videos mit den beiden Werbungen unterscheiden.

e) **(0.5 Punkte)** Wenn die Daten wirklich $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt sind, erwarten wir ungefähr eine Gerade (mit Steigung σ und Achsenabschnitt μ). Anhand dieses QQ-Plots können wir schliessen, dass die Zeitdifferenzen eher $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt sind.

f) **(1 Punkt)** Unter der Annahme einer Normalverteilung sollte Youtube den t-Test wählen, da er eine bessere Macht hat (unter dieser Annahme) als der Wilcoxon-Test oder der Vorzeichen-Test. Der z-Test ist keine Option, denn die Varianz ist nicht bekannt.

Also führen wir einen zweiseitigen Test zum Niveau 5% mit Null- und Alternativhypothese $H_0 : \mu = 0$ und $H_A : \mu \neq 0$ durch. Der Verwerfungsbereich ist somit gegeben durch

$K = (-\infty, t_{\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty) = (-\infty, t_{0.025}] \cup [t_{0.975}, \infty) = (-\infty, -2.262] \cup [2.262, \infty)$. Die Teststatistik lautet nun $T = \sqrt{10}\frac{\overline{D}_{10}-\mu_0}{s_d}$, und ihre Realisierung ist gegeben durch

$$t = \sqrt{10}\frac{\overline{d}_{10} - \mu_0}{s_d} = \sqrt{10}\frac{-0.70}{4.85} = -0.456 \notin K\,.$$

Also wird H_0 auch hier **nicht** verworfen.

g) **(1 Punkte)** Wir suchen α, so dass $t_{9,1-\frac{\alpha}{2}} = -0.456$. Also wollen wir α mit

$$\begin{aligned} P(T_9 \leq -0.456) = \frac{\alpha}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - P(T_9 \leq 0.456) = \frac{\alpha}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad P(T_9 \leq 0.456) = 1 - \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Durch Rückwärtsauslesen aus der Tabelle der t-Quantile sieht man lediglich, dass der Wert zwischen 60% und 70% liegen muss (linear interpoliert erhält man 66.9%). Der P-Wert (zwischen 60% und 80%) ist demzufolge gösser als das Signifikanzniveau 5%; deshalb wird die Nullhypothese nicht verworfen.