# Stochastik - Lösungsskizze (BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

**1.** Wir definieren die Ereignisse

$$\begin{aligned} A &= \{ \text{ Glühbirne vom Typ } A \text{ gekauft } \}; \\ B &= \{ \text{ Glühbirne vom Typ } B \text{ gekauft } \}; \\ C &= \{ \text{ Glühbirne vom Typ } C \text{ gekauft } \}, \end{aligned}$$

mit $P[A] = 1/3$, $P[B] = 1/2$ und $P[C] = 1/6$. Sei $T$ die Brenndauer der gekauften Glühbirne.

**a)** Der Satz von Bayes liefert

$$\begin{aligned} P[A|T \geq 1/2] &= \frac{P[T \geq 1/2|A]P[A]}{P[T \geq 1/2]} \\ &= \frac{P[T_A \geq 1/2|A]P[A]}{P[T_A \geq 1/2|A]P[A] + P[T_B \geq 1/2|B]P[B] + P[T_C \geq 1/2|C]P[C]} \\ &= \frac{P[T_A \geq 1/2]/3}{P[T_A \geq 1/2]/3 + P[T_B \geq 1/2]/2 + P[T_C \geq 1/2]/6} \\ &= \frac{2e^{-3/2}}{2e^{-3/2} + 3e^{-2} + e^{-4}} \approx 0.51. \end{aligned}$$

**b)** Für eine exponentialverteilte Zufallsvariable $X$ mit Parameter $\lambda > 1$ gelten

$$E[X] = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}, \qquad E\left[X^2\right] = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2},$$

$$\operatorname{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \qquad E\left[e^X\right] = \int_0^\infty e^x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

**Bitte wenden!**

Nach Definition der Kovarianz sowie der Unabhängigkeit der Brenndauern gilt

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left(T_A(1-T_B), T_B e^{T_C}\right) &= E\left[T_A(1-T_B)T_B e^{T_C}\right] \\
&\quad - E\left[T_A(1-T_B)\right] E\left[T_B e^{T_C}\right] \\
&= E\left[T_A\right] E\left[(1-T_B)T_B\right] E\left[e^{T_C}\right] \\
&\quad - E\left[T_A\right] E\left[1-T_B\right] E\left[T_B\right] E\left[e^{T_C}\right] \\
&= E\left[T_A\right] E\left[e^{T_C}\right] \left(E\left[T_B\right] - E\left[T_B^2\right] - E\left[T_B\right]\left(1 - E\left[T_B\right]\right)\right) \\
&= E\left[T_A\right] E\left[e^{T_C}\right] \left(E\left[T_B\right]^2 - E\left[T_B^2\right]\right) \\
&= -E\left[T_A\right] E\left[e^{T_C}\right] \mathrm{Var}\left(T_B\right) \\
&= -\frac{1}{3}\frac{8}{7}\frac{2}{16} = -\frac{1}{42} = -0.024.
\end{aligned}
$$

**c)** Wir bezeichnen mit $T_1$, $T_2$ und $T_3$ die Brenndauern der drei Glühbirne. Gesucht ist

$$
\begin{aligned}
P\left[\min\{T_1, T_2\} \leq 1/3\right] &= 1 - P\left[\min\{T_1, T_2\} > 1/3\right] \\
&= 1 - P\left[T_1 > 1/3,\ T_2 > 1/3\right].
\end{aligned}
$$

Die Verteilungsannahmen liefern

$$
\begin{aligned}
P\left[\min\{T_1, T_2\} \leq 1/3\right] &= 1 - P\left[T_1 > 1/3\right] P\left[T_2 > 1/3\right] \\
&= 1 - P\left[T_1 > 1/3\right]^2 = 1 - e^{-2} \approx 0.86.
\end{aligned}
$$

**d)** Die letzte Glühbirne erlischt nach $\min\{T_1, T_2\} + 2$ Stunden. Wir müssen unterscheiden, welche Glühbirne zuerst erlischt. Gesucht ist also

$$
\begin{aligned}
&P\left[\min\{T_1, T_2\} + 2 < \max\{T_1, T_2\}\right] \\
&\quad = P\left[T_1 \geq T_2,\ T_2 + 2 < T_1\right] + P\left[T_1 < T_2,\ T_1 + 2 < T_2\right] \\
&\quad = P\left[T_2 + 2 < T_1\right] + P\left[T_1 + 2 < T_2\right] \\
&\quad = 2P\left[T_2 + 2 < T_1\right]
\end{aligned}
$$

Wir haben

$$
\begin{aligned}
2P\left[T_2 + 2 < T_1\right] &= 2\int_0^\infty 3e^{-3t_2} \int_0^\infty 1_{\{t_2+2<t_1\}} 3e^{-3t_1}\, dt_1\, dt_2 \\
&= 2\int_0^\infty 3e^{-3t_2} \int_{t_2+2}^\infty 3e^{-3t_1}\, dt_1\, dt_2 \\
&= 2\int_0^\infty 3e^{-3t_2} e^{-3(t_2+2)}\, dt_2 \\
&= e^{-6}\int_0^\infty 6e^{-6t_2}\, dt_2 = e^{-6} \approx 0.00248.
\end{aligned}
$$

**Siehe nächstes Blatt!**

**2. a)** Für die Randdichte von $X$ gilt

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \;=\; 60x^2 \int_0^1 y1_{\{y<1-x\}}dy \\ &= 60x^2 \int_0^{1-x} ydy \;=\; 30x^2(1-x)^2, \end{aligned}$$

für $x \in [0,1]$. Für die Randdichte von $Y$ gilt

$$f_Y(y) \;=\; 60y \int_0^1 x^2 1_{\{x<1-y\}}dx \;=\; 60y \int_0^{1-y} x^2 dx \;=\; 20y(1-y)^3,$$

für $y \in [0,1]$.

**b)** Es gilt

$$\begin{aligned} P[Y \le X] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)1_{\{y\le x\}}dy\, dx \\ &= 60 \int_0^1 x^2 \int_0^1 y1_{\{y<1-x\}}1_{\{y\le x\}}dy\, dx \\ &= 60 \int_0^1 x^2 \int_0^{\min\{1-x,x\}} ydy\, dx \;=\; 30 \int_0^1 x^2 \left(\min\{1-x,x\}\right)^2 dx. \end{aligned}$$

Durch Aufteilung des Integrals folgt

$$\begin{aligned} P[Y \le X] &= 30 \int_0^1 x^2 \left(\min\{1-x,x\}\right)^2 dx \\ &= 30 \int_0^{1/2} x^2x^2dx + 30 \int_{1/2}^1 x^2 (1-x)^2 dx \\ &= 30 \int_0^1 x^4dx + 30 \int_{1/2}^1 x^2 - 2x^3 dx \\ &= 6 + \left[10x^3 - 15x^4\right]_{1/2}^1 \\ &= 6 + \left(-5 - \frac{5}{4} + \frac{15}{16}\right) \;=\; 1 - \frac{5}{16} \;=\; \frac{11}{16} \;=\; 0.6875. \end{aligned}$$

**c)** Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ der relative Anteil an Traubenzucker pro Weintraube mit $\sigma > 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$ unbekannt. Wir wollen testen, ob $\mu = \mu_0 = 20\%$ stimmen könnte. Also führen wir einen zweiseitigen Test durch, mit folgenden Hypothesen.

$$\begin{aligned} H_0 : \mu &= \mu_0 = 20\% \\ H_A : \mu &\ne \mu_0. \end{aligned}$$

Da die Beobachtungen normalverteilt sind und $\sigma$ unbekannt ist, führen wir einen t-Test zum Niveau $\alpha = 5\%$ durch.

**Bitte wenden!**

Die realisierte Teststatistik ist

$$t \quad = \quad \frac{\overline{x}_{30} - \mu_0}{s_{30}/\sqrt{30}} \quad = \quad \sqrt{30}\frac{0.223 - 0.2}{\sqrt{0.004}} \quad = \quad \sqrt{3}(1.15) \quad \approx \quad 1.992.$$

Mit $t_{29,1-\alpha/2} = t_{29,0.975} = 2.045$ ist der Verwerfungsbereich gegeben durch

$$K \quad = \quad (-\infty, -2.045] \cup [2.045, \infty).$$

Da $t \notin K$ ist, wird die Nullhypothese nicht verworfen.

**Siehe nächstes Blatt!**

**3.** **a)** Es gilt

$$\begin{aligned} P[X=x] &= \frac{1}{2}\left(0.25\cdot 1_{\{x=6\}}+\frac{0.75}{5}1_{\{x\neq 6\}}\right) \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{2}\left(0.75\cdot 1_{\{x=6\}}+\frac{0.25}{5}1_{\{x\neq 6\}}\right) \\ &= \frac{1}{2}1_{\{x=6\}}+\frac{1}{10}1_{\{x\neq 6\}}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$E[X] = \sum_{x=1}^{6} xP[X=x] = \frac{1}{10}\sum_{x=1}^{5} x+\frac{6}{2} = \frac{15}{10}+\frac{6}{2} = 4.5,$$

sowie

$$E\left[X^2\right] = \sum_{x=1}^{6} x^2P[X=x] = \frac{1}{10}\sum_{x=1}^{5} x^2+\frac{36}{2} = \frac{55}{10}+\frac{36}{2} = 23.5.$$

Für die Varianz gilt also

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[X^2\right]-E\left[X\right]^2 = 23.5-(4.5)^2 = 23.5-20.25 = 3.25.$$

**b)** Es sei $X_i$ die Augenzahl beim $i$-ten Wurf. Wir suchen das kleinste $n$ mit

$$\begin{aligned} 0.95 &\leq P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-E[X]\right|\leq 0.1\right] \\ &= P\left[\sqrt{n}\left|\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-E[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right|\leq \frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right] \\ &\approx P\left[|Z|\leq \frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right], \end{aligned}$$

wobei wir den Zentralen Grenzwertsatz verwendet haben und $Z$ eine Standardnormalverteilung hat. Wir suchen das kleinste $n$ mit

$$\begin{aligned} 0.95 &\leq 1-2\left(1-P\left[Z\leq \frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right]\right) \\ &= 2P\left[Z\leq \frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right]-1 = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right)-1, \end{aligned}$$

mit $\Phi$ als Verteilungsfunktion von $Z$. Wir formen um:

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right) &\geq 0.975 \\ \Leftrightarrow \quad n &\geq \left(\Phi^{-1}(0.975)10\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\right)^2 = 1248.5. \end{aligned}$$

Es muss also mindestens 1249 mal geworfen werden.

**Bitte wenden!**

**c)** Sei $X_c$ die Augenzahl beim Wurf mit dem Würfel. Es gilt

$$P[X_C = x] \quad = \quad \theta_C 1_{\{x=6\}} + \frac{1-\theta_C}{5} 1_{\{x \neq 6\}}.$$

Seien $x_1, \ldots, x_{100}$ unabhängige Beobachtungen von $X$. Die Likelihood-Funktion von $\theta_C$ ist dann

$$L(\theta_C; x_1, \ldots, x_{100}) \quad = \quad \prod_{i=1}^{100} \left( \theta_C 1_{\{x_i=6\}} + \frac{1-\theta_C}{5} 1_{\{x_i \neq 6\}} \right) \quad = \quad \theta_C^{N_6} \left( \frac{1-\theta_C}{5} \right)^{100-N_6},$$

wobei $N_6 \; = \; |\{i \mid x_i = 6\}|$ die Anzahl geworfener 6er ist.

Die Log-Likelihood-Funktion ist also

$$l(\theta_C; x_1, \ldots, x_{100}) \quad = \quad N_6 \log(\theta_C) + (100 - N_6) \log((1-\theta_C)/5).$$

Die Nullstelle der Ableitung (nach $\theta_C$) ist gegeben durch

$$0 \; = \; \frac{N_6}{\theta_C} - \frac{100 - N_6}{1 - \theta_C} \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \; = \; N_6 - 100\theta_C.$$

Der Maximum-Likelihood Schätzer von $\theta_C$ basierend auf $x_1, \ldots, x_{100} > 0$ ist also

$$\hat{\theta}_C \quad = \quad \frac{N_6}{100} \; = \; 0.34,$$

wobei $N_6 \; = \; |\{i \mid x_i = 6\}| = 34$ die Anzahl geworfener 6er ist.

**d)** Die Apriori-Dichte von $\Theta$ ist

$$f(\theta_C) \quad = \quad 1, \qquad \text{für } \theta_C \in [0, 1].$$

Die Posteriori-Dichte von $\Theta$ gegeben die Beobachtung $x = 3$ ist

$$\begin{aligned} f(\theta_C|3) \quad &= \quad \frac{P_{\theta_C}[X = 3] f(\theta_C)}{\int_{-\infty}^{\infty} P_\theta[X = 3] f(\theta) d\theta} \quad = \quad \frac{1 - \theta_C}{\int_0^1 (1 - \theta) d\theta} \\ &= \quad \frac{1 - \theta_C}{1 - 0.5} \quad = \quad 2(1 - \theta_C), \end{aligned}$$

für $\theta_C \in [0, 1]$.