Prof. Dr. J. Teichmann ETH Zürich Sommer 2016

Stochastik
(BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

1. (10 Punkte) In einem Laden gibt es Glühbirnen vom Typ A, B und C mit Brenndauern T_A, T_B und T_C (in Stunden), welche jeweils unabhängig und exponentialverteilt sind mit respektiven Parametern 3, 4 und 8. Ein Käufer wirft einen fairen Würfel und kauft eine Glühbirne vom Typ A, falls ⚀ oder ⚁ fällt. Er kauft eine Glühbirne vom Typ B, falls ⚂, ⚃ oder ⚄ fällt. Ansonsten kauft er eine vom Typ C.

a) Gegeben, die gekaufte Glühbirne brennt mindestens eine halbe Stunde, berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass diese vom Typ A ist.

b) Berechnen Sie $\operatorname{Cov}\big(T_A(1 - T_B), T_B\, e^{T_C}\big)$.

Wir nehmen nun an, der Käufer hat drei Glühbirnen vom Typ A gekauft, deren Brenndauern unabhängig angenommen werden. Er zündet zuerst zwei Glühbirnen gleichzeitig an. Sobald eine dieser Glühbirnen durchgebrannt ist, zündet er die dritte Glühbirne an.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die dritte Glühbirne spätestens nach 20 Minuten angezündet wird.

d) Gegeben, die dritte Glühbirne brennt genau 2 Stunden, berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass diese *nicht* als letzte erlischt.

2. (10 Punkte) Der Zucker einer Weintraube besteht unter anderem aus Traubenzucker und Fruchtzucker. Der relative Anteil X an Traubenzucker und der relative Anteil Y an Fruchtzucker sind jedoch variabel. Die gemeinsame Dichte von X und Y sei

$$f_{X,Y}(x,y) = 60yx^2, \qquad \text{für } x, y \in (0,1) \text{ mit } x+y<1,$$

und $f_{X,Y}(x,y) = 0$ sonst.

a) Berechnen Sie die Randdichten von X sowie von Y.

b) Berechnen Sie $P[Y \leq X]$.

Bei der Züchtung einer bestimmten Traubensorte soll der relative Anteil an Traubenzucker gezielt 20% pro Weintraube betragen. Es soll getestet werden, ob die Zucht richtig funktioniert. 30 unabhängige Weintrauben wurden dafür genommen, wobei sich folgende Kennzahlen ergeben haben:

$$\bar{x}_{30} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} x_i = 0.223 \quad \text{und} \quad s_{30}^2 = \frac{1}{30-1}\sum_{i=1}^{30}(x_i - \bar{x}_{30})^2 = 0.004,$$

wobei x_i der gemessene relative Anteil an Traubenzucker der i-ten Traube ist. Wir nehmen an, dass diese relativen Anteile jeweils von einer Normalverteilung stammen.

c) Führen Sie einen geeigneten Test auf dem $\alpha = 5\%$ Niveau durch. Formulieren Sie dazu die geeignete Null- und Alternativhypothese sowie den Verwerfungsbereich und die realisierte Teststatistik. Bestimmen Sie den Testentscheid.

3. (10 Punkte) Ein Zauberwarenladen verkauft gezinkte Würfel vom Typ A und Typ B. Sei X_T die geworfene Augenzahl bei einem Wurf mit einem Würfel vom Typ $T \in \{A, B\}$. Für einen Würfel vom Typ T gelte

$$P[X_T = i] = \begin{cases} \theta_T, & \text{falls } i = 6, \\ (1 - \theta_T)/5, & \text{falls } i \in \{1, \dots, 5\}, \end{cases}$$

wobei $\theta_A = 0.25$ und $\theta_B = 0.75$. Wir bekommen einen dieser Würfel geschenkt, wobei dessen Typ zufällig mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt worden ist. Es bezeichne X die Augenzahl bei einem Wurf mit diesem Würfel.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

b) Wie oft muss der erhaltene Würfel mindestens geworfen werden, damit mit Wahrscheinlichkeit mindestens 95% die durchschnittliche Augenzahl nicht mehr als 0.1 von dem erwarteten Durchschnitt abweicht? Verwenden Sie eine geeignete Approximation.

Wir betrachten nun einen Würfel von einem weiteren Typ C wie oben, wobei θ_C unbekannt ist.

c) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer von θ_C basierend auf 100 unabhängigen Würfen, bei denen 34 mal die 6 geworfen wurde.

d) Wir fassen θ_C als Realisation einer Zufallsvariable Θ auf. Als Apriori-Verteilung von Θ wählen wir die Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 1]$ und wir werfen den Würfel einmal. Bestimmen Sie die Dichtefunktion der Posteriori-Verteilung von Θ gegeben die geworfene Augenzahl ist $x = 3$.