Stochastik
(BSc D-MAVT / BSc D-MATH / BSc D-MATL)

1. (10 Punkte) 70% der Telefonanrufe, welche Franz pro Tag bekommt, kommen aus der Schweiz, die restlichen Anrufe kommen aus dem Ausland. Von den Anrufen aus der Schweiz sind 30% geschäftlich, 50% privat und die restlichen Anrufe sind Werbeanrufe. Von den Anrufen aus dem Ausland sind 60% geschäftlich, 30% privat und die restlichen Anrufe sind Werbeanrufe.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiger Anruf privat ist?

b) Gegeben, Franz erhält einen geschäftlichen Anruf, bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass dieser Anruf aus dem Ausland kommt.

Franz hat an diesem Tag total 25 Anrufe aus der Schweiz erhalten. Die Gesprächsdauern X_i (in Minuten) pro Anruf aus der Schweiz, $i = 1, \dots, 25$, seien unabhängig und jeweils Exponential-verteilt mit Parameter $1/2$.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $X_1 I_1$, wobei I_1 unabhängig von X_1 ist und eine Bernoulliverteilung mit Parameter $p \in (0, 1)$ hat.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Franz an diesem Tag mehr als 20 Minuten mit *Werbeanrufen* aus der Schweiz verbracht hat. Verwenden Sie dazu den Zentralen Grenzwertsatz.

Bitte wenden!

2. (10 Punkte) Sei Z eine Zufallsvariable mit der Dichte $f_Z(z) = 0$, für $z \leq 0$, und

$$f_Z(z) = \frac{2}{(1+z)^3}, \qquad \text{für } z > 0.$$

a) Bestimmen Sie $E[Z]$.

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $\log(1+Z)$.

Seien X und Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4}(1+xy^2), \qquad \text{für } |x| \leq 1 \text{ und } |y| \leq 1,$$

und $f_{X,Y}(x,y) = 0$ sonst.

c) Berechnen Sie die Randdichte von X und die Randdichte von Y.

d) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y. Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem mathematischen Argument.

3. (10 Punkte) Ein Hersteller von Mineralwasser füllt aufbereitetes Wasser in 1-Liter-Flaschen ab. Die Abfülldauer X (in Minuten) pro Flasche habe die Dichte $f_\theta(x) = 0$, für $x \leq 0$, und

$$f_\theta(x) \;=\; x^2 \theta e^{-\theta x^3/3}, \qquad \text{für } x > 0,$$

wobei $\theta > 0$ ein unbekannter Parameter ist.

a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer von θ basierend auf 10 unabhängigen Beobachtungen von X.

b) Wir fassen θ als Realisation einer Zufallsvariable Θ auf. Als Apriori-Verteilung von Θ wählen wir die Exponentialverteilung mit Parameter 1. Bestimmen Sie die Posteriori-Dichte von Θ gegeben die Abfülldauer $x = 3$.

Der Hersteller gibt an, dass seine Flaschen im Schnitt gerade die gesetzliche Obergrenze von $1mg$ Eisen enthalten. Das Gesundheitsamt ist aber skeptisch und untersucht daher das Wasser von 25 unabhängigen Flaschen auf deren Eisengehalt. Dabei sind sie auf folgende Kennzahlen gestossen.

$$\bar{x}_{25} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} x_i = 1.1 \quad \text{und} \quad s_{25}^2 = \frac{1}{25-1}\sum_{i=1}^{25}(x_i - \bar{x}_{25})^2 = 0.2,$$

wobei $x_1, \ldots, x_{25}$ die gemessenen Eisenmengen pro Flasche sind (in mg). Das Gesundheitsamt nimmt zudem an, dass die Eisenmenge (in mg) pro Flasche normalverteilt ist mit Varianz 0.25.

c) Führen Sie einen geeigneten Test auf dem $\alpha = 2.5\%$ Niveau durch. Formulieren Sie dazu die geeignete Null- und Alternativhypothese und bestimmen Sie den Verwerfungsbereich sowie die realisierte Teststatistik. Bestimmen Sie den Testentscheid.