Musterlösung W&S

1. **a)** 1) **b)** 1) **c)** 1) **d)** 2) **e)** 3) **f)** 2) **g)** 1) **h)** 1) **i)** 2) **j)** 3)

2. **a)** Sei $F = \{\text{fairer Würfel gewählt}\}$ und $A = \{\text{Zweimal sechs geworfen}\}$. Mit dem Satz von Bayes erhalten wir

$$\begin{aligned} P[F|A] &= \frac{P[A|F] \cdot P[F]}{P[A]} = \frac{P[A|F] \cdot P[F]}{P[A|F] \cdot P[F] + P[A|F^c] \cdot P[F^c]} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{9}{10}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{9}{10} + 1 \cdot \frac{1}{10}} \\ &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

b) Es sei $F = \{\text{Glühbirne funktioniert}\}$ und $B_i = \{\text{Glühbirne } i \text{ gewählt}\}$, $i = 1, 2, 3$. Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit folgt

$$\begin{aligned} P[F] &= P[F|B_1] \cdot P[B_1] + P[F|B_2] \cdot P[B_2] + P[F|B_3] \cdot P[B_3] \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{19}{30}. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$P[B_2|F] = \frac{P[F|B_2] \cdot P[B_2]}{P[F]} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{19}{30}} = \frac{5}{38}.$$

c) Definiere $D = \{\text{Kunde ist Dieb}\}$ und $A = \{\text{Alarm geht los}\}$. Mit dem Satz von Bayes folgt

$$\begin{aligned} P[D^c|A] &= \frac{P[A|D^c] \cdot P[D^c]}{P[A|D^c] \cdot P[D^c] + P[A|D] \cdot P[D]} \\ &= \frac{\frac{2}{100} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{2}{100} \cdot \frac{9}{10} + \frac{95}{100} \cdot \frac{1}{10}} = \frac{18}{113}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

3. **a)** Es gilt $P[Z_i = 0] = e^{-\lambda}$, daher ist X binomial verteilt mit Parameter $n = 1000$ und $e^{-0.1}$.

b) Wir berechnen den Erwartungswert und die Varianz von Y:

$$E[Y] = 1000E[Z_1] = 100,$$

$$\text{Var}[Y] = 1000\text{Var}[Z_1] = 100.$$

Dann gilt $\frac{Y-100}{10} \approx \mathcal{N}(0,1)$ und

$$P[Y \leq 120] \approx P\left[\frac{Y-100}{10} \leq 2\right] = 0.9773.$$

c) Mit $\lambda_0 = 0.121$, ist $E_{\lambda_0}[Y] = 121$ und $\text{Var}_{\lambda_0}[Y] = 121$. Daher hat man

$$P_{\lambda_0}[Y \leq c] \approx P\left[\frac{Y-121}{11} \leq \frac{c-121}{11}\right] = 0.1.$$

Mit $\Phi^{-1}(0.1) \approx -1.28$, bekommen wir

$$\frac{c-121}{11} \approx -1.28$$

und

$$c \approx 121 - 1.28 \cdot 11 \approx 107.$$

d) Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese angenommen wird, obwohl sie falsch ist, d.h.

$$P_\lambda[Y \geq 107] \approx P\left[\frac{Y-100}{10} \geq 0.7\right] = 1 - 0.758 \approx 24\%.$$

4. **a)** Das $(1-\alpha)$- Vertrauensintervall für die Lichtgeschwindigkeit ist durch

$$\left[299000 + \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t\left(n-1, 1-\frac{\alpha}{2}\right), 299000 + \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t\left(n-1, 1-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

gegeben. Da $\alpha = 0.01$ und $n = 16$, ist $t(15, 0.995) = 2.947$ und das Vertrauensintervall daher

$$\left[299900 - \frac{104.56}{4} 2.947, 299900 + \frac{104.56}{4} 2.947\right]$$

b) Die Nullhypothese lautet $H_0 : \mu = 299960$ und die Alternativhypothese $\mu < 299960$. Der zu verwendende Test ist ein einseitiger t-Test.

c) Wir verstehen die Geschwindigkeiten v als Realisierung einer Zufallsvariablen X. Der Verwerfungsbereich zum 5% Niveau kann durch

$$0.05 \geq P_0[T < k]$$

bestimmt werden, wobei T durch

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - 960}{s} = \sqrt{16} \frac{900 - 960}{104.56} = -2.295$$

gegeben ist und unter H_0, t-verteilt ist mit 15 Freiheitsgraden. Da $t_{15,0.95} = 1.753$ ist, ist der Verwerfungsbereich $(-\infty, -1.753)$. Die Nullhypothese wird verworfen, weil $-2.295 < -1.753$.

d) Da $T = -2.295$ ist, liegt der P-Wert des Tests in c) zwischen 1% -2%. Es gilt nämlich $t_{15,0.02} = -2.249$, $t_{15,0.01} = -2.602$ und $-2.602 < -2.295 < -2.249$.