Wahrscheinlichkeit und Statistik
BSc D-INFK

1. (10 Punkte) Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig. Es gibt pro richtig beantwortete Frage 1 Punkt und pro falsche Antwort $1/2$ Punkt Abzug. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte. **Bitte benützen Sie das beiliegende Antwortblatt.**

a) Sei X eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Parameter $n = 5$ und $p = \frac{1}{2}$. Dann gilt:

1) $P(X \geq 3) = \frac{1}{2}$.
2) $P(X \geq 3) = \frac{3}{16}$.
3) $P(X \geq 3) = \frac{5}{16}$.

b) Seien A und B Ereignisse mit $P(A) = \frac{1}{3}$ und $P(A|B) = P(B|A) = \frac{1}{4}$. Wie gross ist $P(B^C)$?

1) $P(B^C) = \frac{2}{3}$.
2) $P(B^C) = \frac{1}{3}$.
3) $P(B^C) = \frac{3}{4}$.

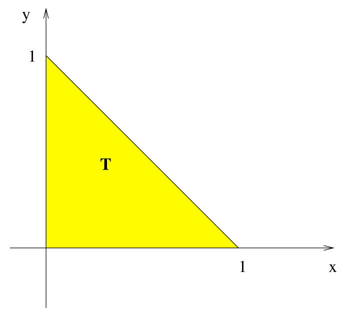
c) Sei X eine Zufallsvariable und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1) $\mathrm{Cov}(a, aX) = 0$.
2) $\mathrm{Cov}(a, aX) = a$.
3) $\mathrm{Cov}(a, aX) = a^2$.

d) Eine Zufallsvariable X nimmt die Werte $-1, 0$ und 1 jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ an. Für $Y = X^2$ gilt dann

1) Die Zufallsvariablen X und Y sind unabhängig.
2) $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
3) $E[Y] = 0$.

e) Die Dichte $f(x, y)$ der zwei-dimensionalen Zufallsvariablen (X, Y) sei im Dreieck T konstant und verschwinde ausserhalb von T.



Die Randdichte $f_X(x)$ von (X, Y) ist

1) $f_X(x) = \frac{1}{2}(1 - x)$.
2) $f_X(x) = \frac{1}{2}(1 + x)$.
3) $f_X(x) = 2(1 - x)$.

f) Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2} & \text{falls } |x| \geq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Konstante c.

1) $c = 0$.
2) $c = \frac{1}{2}$.
3) $c = 1$.

g) Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 4x^{-5} & \text{falls } x \geq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ferner sei $Y = \log(X)$. Dann gilt:

1) Y ist exponentialverteilt mit Parameter 4.
2) Y ist exponentialverteilt mit Parameter 5.
3) Keine der beiden Aussagen stimmt.

Siehe nächstes Blatt!

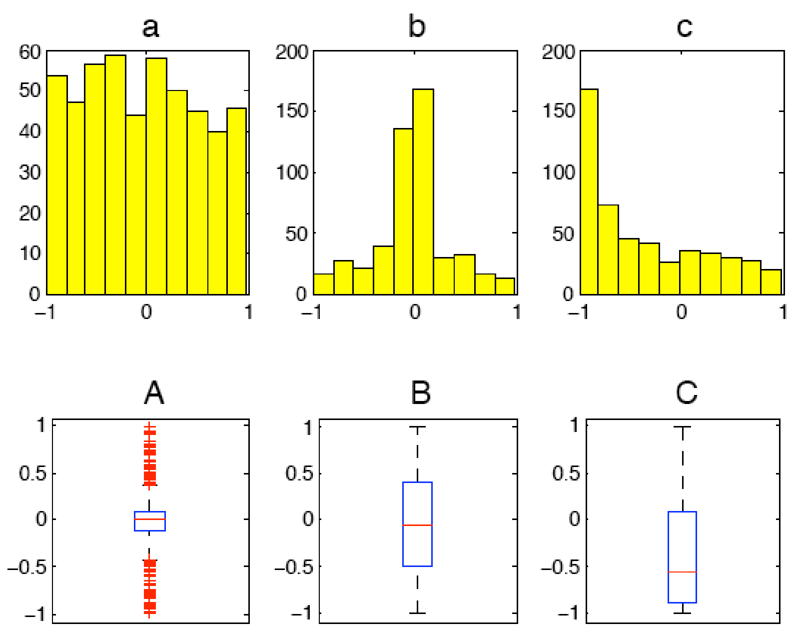
h) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, identisch verteilte Zufallsvariablen mit kumulativer Verteilungsfunktion F. Die kumulative Verteilungsfunktion von $\underline{X} := \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ ist

1) $F_{\underline{X}}(x) = 1 - \big(1 - F(x)\big)^n$.
2) $F_{\underline{X}}(x) = \big(1 - F(x)\big)^n$.
3) $F_{\underline{X}}(x) = F(x)^n$.

i) Sei α die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art bei einem statistischen Test. Dann ist $1 - \alpha$,

1) die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese vom Test verworfen wird, wenn sie richtig ist.
2) die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese vom Test belassen wird, wenn sie richtig ist.
3) die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese vom Test belassen wird, wenn die Alternativhypothese richtig ist.

j) Ordnen Sie jedem Histogramm den zugehörigen Boxplot zu:



1) aB, bC, cA.
2) aA, bC cB.
3) aB, bA, cC.

Bitte wenden!

2. (8 Punkte)

a) Man habe zehn Würfel, neun dieser Würfel sind fair, bei einem Würfel wird mit Wahrscheinlichkeit 1 eine Sechs geworfen. Man wählt zufällig einen Würfel aus und wirft diesen zweimal. Dabei werfe man zweimal eine Sechs. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dies trotzdem ein fairer Würfel ist?

b) Von drei Glühbirnen werde zufällig eine ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit, dass Glühbirne 1 funktioniert betrage 75%, die Wahrscheinlichkeit, dass Glühbirne 2 funktioniert sei 25% und die Wahrscheinlichkeit, dass Glühbirne 3 funktioniert sei 90%. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ausgewählte Glühbirne funktioniert? Falls die Glühbirne funktioniert, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Glühbirne 2 ausgewählt wurde?

c) In einem Kaufhaus mit Diebstahl-Alarm seien zehn Prozent der Kunden Diebe. Im Falle eines Diebstahls geht der Alarm in 95% der Fälle los, bei einem ehrlichen Kunden geht der Alarm mit einer Wahrscheinlichkeit von zwei Prozent los. Man hört nun den Alarm. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der betroffene Kunde ehrlich ist?

Siehe nächstes Blatt!

3. (8 Punkte)

Eine Fabrik produziert jeden Tag 1000 Computerchips. Jeder dieser Chips enthält eine zufällige Anzahl $Z_i, i = 1, \ldots, 1000$, an defekten Bauteilen. Die Zufallsvariablen Z_i sind unabhängig und alle Poisson(λ) mit $\lambda = 0.1$ verteilt.

a) Sei X die Anzahl der an einem Tag produzierten Chips, die keinen einzigen defekten Bauteil enthalten, d.h. $X = \sum_{i=1}^{1000} 1_{\{Z_i=0\}}$. Welche Verteilung hat X?

b) Sei Y nun die Anzahl aller defekten Bauteile aller 1000 Chips, d.h. $Y = \sum_{i=1}^{1000} Z_i$. Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz, um die Wahrscheinlichkeit $P[Y \leq 120]$ approximativ zu berechnen.

c) Wir führen nun einen Test auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 10\%$ durch (für die Güte der Computerchips). Dabei seien die Nullhypothese $H_0 : \lambda_0 = 0.121$ und die Alternativhypothese $H_A : \lambda < 0.121$. Berechnen Sie $c \geq 0$, so dass die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese fälschlicherweise abzulehnen, approximativ $\alpha = 10\%$ beträgt, d.h.

$$P_{H_0}[Y \leq c] \approx \alpha.$$

Verwenden Sie dabei die Normalapproximation. Der Verwerfungsbereich ist nun $[0, c]$.

d) Berechnen Sie mittels Normalapproximation die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art für den Test aus c) unter der wahren Verteilung wie zu Beginn angegeben (Poisson(λ) mit $\lambda = 0.1$).

Falls Sie c) nicht lösen konnten, können Sie mit dem Verwerfungsbereich $[0, 104]$ weiterrechnen.

4. (8 Punkte)

Im Jahr 1879 machte der amerikanische Physiker A.A. Michelson Messungen zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit. Bei einem bestimmten Experiment kam er zu dem in der untenstehenden Tabelle zusammengefassten Ergebnis. Wir bezeichnen mit c die gemessene Lichtgeschwindigkeit in km/sec und mit $v = c - 299000$ km/sec. Die Tabelle enthält die gemessenen Werte für v.

Messung	1	2	3	4	5	6	7	8
Geschwindigkeit v	850	740	900	1070	930	850	950	980
Messung	9	10	11	12	13	14	15	16
Geschwindigkeit v	980	1000	880	980	930	650	900	810

Die folgenden aus den Daten berechneten Kennzahlen stehen zur Verfügung: Mittelwert $\bar{x}$=900 und empirische Standardabweichung s=104.56. Nehmen Sie an, dass die Messergebnisse normalverteilt sind mit unbekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Varianz σ^2.

a) Konstruieren Sie das zweiseitige 99%-Vertrauensintervall für den Erwartungswert der Lichtgeschwindigkeit c. Welche Statistik verwendet man hier? Es reicht die entsprechenden Werte, in die Formel einzusetzen, das genaue Ergebnis muss nicht berechnet werden.

b) Es soll nun getestet werden, ob der Erwartungswert der Lichtgeschwindigkeit kleiner als 299960 km/sec ist. Formulieren Sie die Null- und Alternativhypothese. Welchen Test sollten Sie verwenden?

c) Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich zum 5% Niveau für den Test in b). Wie entscheidet der Test?
Hinweis: Benützen Sie, dass $\frac{240}{104.56} \approx 2.3$.

d) Berechnen Sie approximativ den P-Wert des Tests in c) (ganzzahlig für einen Prozentbereich, z.B. 3% - 4% oder 2% - 3%, etc.).