Prof. Patrick Cheridito   ETH Zürich   Sommer 2018

Wahrscheinlichkeit und Statistik
BSc D-INFK

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Tragen Sie Ihre Daten in dieses Deckblatt ein und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, rotem oder grünem Kugelschreiber.
- Lesen Sie alle Aufgaben durch, bevor Sie beginnen. Für eine genügende Note wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben in der Ihnen zur Verfügung stehenden Zeit lösen können.
- Es dürfen sich nur erlaubte Hilfsmittel auf dem Tisch befinden, d.h. 10 A4-Seiten resp. 5 Blätter Zusammenfassung. **Kein Taschenrechner!**

Name:	
Vorname:	
Stud. Nr.:	

Das Folgende bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe	mögliche Punkte	erreichte Punkte	Kontrolle
1	10		
2	10		
3	12		
4	8		

Punktetotal:	
Vollständigkeit:	

1. (10 Punkte) Ein griechischer Küchenchef bereitet griechische Salate zu. Er ist nicht präzise mit den Mengen von Tomaten und Feta, die er verwendet. Sei X die Menge von Tomaten und Y die Menge von Feta für einen Salat, beide in kg. Die gemeinsame Dichte von X und Y sei gegeben durch

$$f_{X,Y}(x,y) = 4\frac{y}{x^3} 1_{\{0<x\leq 1\}} 1_{\{0<y\leq x^2\}}\,.$$

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $f_X(x) = 2x 1_{\{0<x\leq 1\}}$.

b) (2 Punkte) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Küchenchef weniger als 500g Tomaten für einen Salat verwendet?

c) (2 Punkte) Wie gross ist der erwartete Quotient zwischen den Mengen an Tomaten und Feta für einen Salat?

d) (2 Punkte) Wenn der Küchenchef schon 300g Tomaten für einen Salat verwendet hat, was ist dann die erwartete Menge an Feta, die er benutzen wird?

e) (2 Punkte) Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort durch ein präzises mathematisches Argument.

2. (10 Punkte) Der griechische Finanzminister will die Höhe der Schulden der 50 staatlichen Unternehmen ermitteln. Er modelliert die Höhe der Schulden eines einzelnen staatlichen Unternehmens mit der Zufallsvariablen X (in Mio. Euro). Er benutzt für X die Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,.$$

(negative Schulden bedeuten Reserven)

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die momenterzeugende Funktion von X gegeben ist durch

$$M_X(t) := E[e^{tX}] = e^{\frac{t^2}{2}}\,.$$

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\inf_{t>0}\left(\frac{n}{2}t^2 - tb\right) = -\frac{b^2}{2n}\,,$$

für jedes $b > 0$ und $n \in \{1, 2, \ldots\}$.

Für $i = 1, \ldots, n$ sei X_i jene Zufallsvariable, welche die Höhe der Schulden des i-ten staatlichen Unternehmens repräsentiert. Die X_i sind i.i.d. mit derselben Verteilung wie X. Sei $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ die Zufallsvariable, welche die Summe der Schulden der n staatlichen Unternehmen darstellt.

c) (1 Punkt) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von S_n.

d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass

$$P\left[|S_n| \geq b\right] \leq \frac{n}{b^2}\,,$$

für jedes $b > 0$.

e) **(2 Punkte)** Zeigen Sie, dass

$$P\left[S_n \geq b\right] \leq \exp\left(-\frac{b^2}{2n}\right),$$

für jedes $b > 0$.

f) **(2 Punkte)** Zeigen Sie, dass, *in Wahrscheinlichkeit*,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0\,.$$

3. **(12 Punkte)** Die griechische Regierung will die Lebensdauer ihrer 12 Windparks ermitteln. Sie modelliert die Lebensdauer eines Windparks mit der Zufallsvariablen X (in Jahrzehnten). Sie benutzt für X die Verteilung mit der Dichte

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \alpha x^{\beta} 1_{\{0\leq x\leq 1\}}\,,$$

wobei $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ Parameter sind. Die Regierung will die Parameter α und β aus einer Stichprobe mit n Beobachtungen schätzen.

a) **(1 Punkt)** Zeigen Sie, dass $\beta = \alpha - 1$.

b) **(1 Punkt)** Bestimmen Sie das s-te Moment von X für $s > -\alpha$.

c) **(1 Punkt)** Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

d) **(2 Punkte)** Bestimmen Sie den Momentenschätzer für α. Bestimmen Sie eine allgemeine Formel für n Beobachtungen.

e) **(3 Punkte)** Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für α. Bestimmen Sie eine allgemeine Formel für n Beobachtungen.

Für $i = 1, \ldots, 12$ sei X_i jene Zufallsvariable, welche die Lebensdauer des i-ten Windparks repräsentiert. Die X_i sind i.i.d. mit derselben Verteilung wie X. Sei $\overline{X}_{12} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} X_i$ die Zufallsvariable, welche die durchschnittliche Lebensdauer der 12 Windparks darstellt. Wir nehmen an, dass $\alpha = 3$.

f) **(4 Punkte)** Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass die durchschnittliche Lebensdauer der 12 Windparks eine Höchstgrenze von 5 Jahren überschreitet.

4. **(8 Punkte)** Ein schweizer Supermarkt führt Spargel von einem griechischen Bauern ein. Er stellt fest, dass im Durchschnitt ungefähr 1.1% der Spargel verfault sind. Laut ihrem Vertrag sollten im Durchschnitt nicht mehr als 1% der Spargel verfault sein. Der schweizer Supermarkt vermutet, dass der Vertrag nicht eingehalten wird. Um diese Hypothese nachzuprüfen, zählt der schweizer Supermarkt in 16 Paketen mit jeweils 1000 Spargel, wieviele verfault sind. Die zugehörigen empirischen Werte sind $\overline{x}_{16} = 11$ und $s_{16} = 3$. Ausserdem nehmen wir an, dass diese Daten näherungsweise aus einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilten Stichprobe stammen.

a) **(3 Punkte)** Lässt sich auf einem 10%-Signifikanzniveau mit obigen Daten tatsächlich nachweisen, dass mehr als 1% der Spargel verfault sind? Formulieren Sie dazu geeignete Hypothesen, geben Sie an, ob der Test ein- oder zweiseitig ist, und führen Sie den Test durch.

b) **(3 Punkte)** Welchen Test kann man durchführen, wenn man weiss, dass die Standardabweichung $\sigma = 3$ beträgt? Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich des analogen Tests für die Frage aus a). Wie lautet nun die Teststatistik, und wie entscheidet dieser Test?

c) **(2 Punkte)** Geben Sie das kleinste Niveau an, bei dem der Test aus b) die Nullhypothese gerade noch verwirft.

Tabelle der Standardnormalverteilung $P(Z \leq 1.96) = 0.975$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Tabelle der t-Verteilung $P(T_9 \leq 2.262) = 0.975$

$df \backslash \alpha$	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
90	0.254	0.526	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576