Wahrscheinlichkeit und Statistik
BSc D-INFK

1. **a)** (iii) **b)** (ii) **c)** (i) **d)** (iii) **e)** (i) **f)** (i) **g)** (ii) **h)** (i) **i)** (ii) **j)** (iii)

2. **a)** i) S_2 ist binomialverteilt mit $n = 2$ und Erfolgsparameter p, d.h. $S_2 \sim Bin(2, p)$.

ii) Sei K das Ereignis, dass Super Mario krank wird. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$\begin{aligned} P[S_2 \geq 1|K] &= P[S_2 = 1 \cup S_2 = 2|K] \\ &= P[S_2 = 1|K] + P[S_2 = 2|K] \\ &= \frac{P[K|S_2 = 1]P[S_2 = 1]}{P[K]} + \frac{P[K|S_2 = 2]P[S_2 = 2]}{P[K]}. \end{aligned}$$

Für $P[K]$ erhalten wir mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P[K] &= P[K|S_2 = 0]P[S_2 = 0] + P[K|S_2 = 1]P[S_2 = 1] + P[K|S_2 = 2]P[S_2 = 2] \\ &= q_0(1-p)^2 + q_1 \cdot 2p(1-p) + q_2 p^2, \end{aligned}$$

also

$$P[S_2 \geq 1|K] = \frac{q_1 \cdot 2p(1-p) + q_2 p^2}{q_0(1-p)^2 + q_1 \cdot 2p(1-p) + q_2 p^2}.$$

b) i) Für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ ist

$$p_{K_1}(k) = P[K_1 = k] = (1-p)^{k-1} p.$$

(D.h. K_1 ist geometrisch verteilt mit Erfolgsparameter p).

ii) Da $K = \min(K_1, K_2)$, K_1 und K_2 unabhängig und geometrisch verteilt sind, erhalten wir

$$\begin{aligned} P[K > n] &= P[K_1 > n, K_2 > n] = P[K_1 > n]P[K_2 > n] = (1-p)^{2n} \\ &= (1 - (2p - p^2))^n. \end{aligned}$$

(K ist auch geometrisch verteilt mit Erfolgsparameter $\tilde{p} = 2p - p^2$).

Bitte wenden!

3. **a)**

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_x^\infty 3e^{-(y+2x)}dy = 3e^{-2x}\left[-e^{-y}\right]_{y=x}^\infty$$
$$= 3e^{-3x}, \quad x \geq 0$$
$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^y 3e^{-(y+2x)}dx = 3e^{-y}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{x=0}^y = \frac{3}{2}e^{-y}(1-e^{-2y})$$
$$= \frac{3}{2}(e^{-y}-e^{-3y}), \quad y \geq 0.$$

b)

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} f_Y(y)dy = \frac{3}{2}\int_0^\infty y(e^{-y}-e^{-3y})dy = \frac{3}{2}\left(1-3^{-2}\right) = \frac{4}{3}$$
$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = \int_0^\infty 3xe^{-3x}dx = 3(3^{-2}) = \frac{1}{3}.$$

c)

$$\mathbb{E}[XY] = \int_0^\infty \int_x^\infty 3xye^{-(y+2x)}dydx \overset{\text{PI}}{=} \int_0^\infty 3xe^{-2x}\left(\left[-ye^{-y}\right]_x^\infty + \int_x^\infty e^{-y}dy\right)dx$$
$$= \int_0^\infty 3xe^{-2x}(-0+xe^{-x}-0+e^{-x})dx = 3\int_0^\infty e^{-3x}(x^2+x)dx$$
$$= 3(3^{-3}\cdot 2 + 3^{-2}) = \frac{5}{9}$$
$$\Rightarrow \operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{9}.$$

Da die Zufallsvariablen korreliert sind, sind sie nicht unabhängig.

d) $\mathbb{E}[S] = 36\cdot\frac{1}{3} = 12$, $\operatorname{Var}[S] = 36\cdot\frac{1}{9} = 4.$

e) $\mathbb{P}[S > 14] = \mathbb{P}[\frac{S-12}{2} > 1] \approx 1-\Phi(1) = 1-0.8413 = 0.1587.$

4. **a)** i) $H_0: \ \mu = \mu_0 = 13.92.$

ii) $H_A: \ \mu < \mu_0 = 13.92.$

iii) $T^{(n)} = \frac{\overline{X}_n-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ unter H_0.

iv) $K_\alpha^{(n)} = (-\infty, z_\alpha)$ wobei z_α das α-Quantil der Standardnormalverteilung ist.

b) Der Verwerfungsbereich ist $K_{0.01}^{(9)} = (-\infty, -2.33)$. Für den beobachteten Wert der Teststatistik erhalten wir

$$T(\omega) = \frac{12.42-13.92}{2/3} = -2.25.$$

Da $T(\omega) \notin K_{0.01}^{(9)}$ wird die Nullhypothese nicht verworfen.

Siehe nächstes Blatt!

c) Aus den Daten erhalten wir

$$T(\omega) = \frac{\overline{x}_9 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{9}} = \frac{12.42 - 13.92}{2/3} = -2.25.$$

Somit $P_{H_0}[T < -2.25] = \Phi(-2,25) = 1 - \Phi(2.25) = 1 - 0.98778 = 0.01222$.
Also $\alpha^* = 0.01222$.

d) Wir suchen n so, dass:

$$P_{H_0}[0.9\mu_0 \leq \overline{X}_n \leq 1.1\mu_0] = 0.95 \Leftrightarrow P_{H_0}\left[\left|\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq \frac{0.1\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right] = 0.95$$

$$\Leftrightarrow \frac{0.1\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{0.975}$$

$$\Leftrightarrow n = \left(\frac{\sigma z_{0.975}}{0.1\mu_0}\right)^2 = 400 \times \left(\frac{z_{0.975}}{13.92}\right)^2 \approx 8.$$