Prof. Dr. P. Embrechts ETH Zürich Sommer 2013

Wahrscheinlichkeit und Statistik
BSc D-INFK

Name:	
Vorname:	
Stud. Nr.:	

Das Folgende bitte nicht ausfüllen!

Aufg.	Summe	Kontr.	Pkte.-Max.
1			10
2			10
3			10
4			10

Punktetotal:	
Vollständigkeit:	

Bitte wenden!

Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 2 Stunden.

Hilfsmittel: 10 A4-Seiten resp. 5 Blätter Zusammenfassung. Kein Taschenrechner!

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Tragen Sie Ihre Daten in dieses Deckblatt ein und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, rotem oder grünem Kugelschreiber.
- Um die volle Punktzahl zu erreichen, begründen Sie bitte alle Resultate durch Zwischenschritte und -rechnungen (ausser Aufgabe 1) und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.
- Lesen Sie alle Aufgaben durch, bevor Sie beginnen. Für eine genügende Note wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben in der Ihnen zur Verfügung stehenden Zeit lösen können.
- Es dürfen sich nur erlaubte Hilfsmittel auf dem Tisch befinden, d.h. 10 A4-Seiten resp. 5 Blätter Zusammenfassung. Kein Taschenrechner!

Siehe nächstes Blatt!

Aufgaben

---

1. (10 Punkte)

Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig. Es gibt pro richtig beantwortete Frage 1 Punkt, pro falsche Antwort $1/2$ Punkt Abzug und für keine Antwort 0 Punkte. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte. **Bitte benützen Sie das beiliegende Antwortblatt**.

a) Die gemeinsame Dichte $f(x, y)$ der Zufallsvariablen X und Y sei im Einheitskreis K konstant und Null ausserhalb. Wie muss man diese Konstante wählen, damit $f(x, y)$ wirklich eine Dichte ist?

(i) Die Konstante ist π^2.

(ii) Die Konstante ist π.

(iii) Die Konstante ist $\frac{1}{\pi}$.

b) Sei X eine Zufallsvariable mit $P[X = 0] = \frac{1}{3}$, $P[X = \frac{1}{3}] = \frac{1}{4}$, $P[X = \frac{2}{3}] = \frac{1}{6}$ und $P[X = \frac{5}{2}] = \frac{1}{4}$. Wie gross ist dann $F_X(\frac{5}{4})$?

(i) $F_X(\frac{5}{4}) = \frac{1}{3}$

(ii) $F_X(\frac{5}{4}) = \frac{3}{4}$

(iii) $F_X(\frac{5}{4}) = \frac{7}{12}$

c) Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. $Exp(\lambda)$-verteilten Zufallsvariablen und sei $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Welche Aussage ist korrekt?

(i) $\frac{S_n - n/\lambda}{\sqrt{n}/\lambda} \overset{\text{approx.}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ für n gross.

(ii) $\frac{S_n - \lambda}{\lambda} \overset{\text{approx.}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ für n gross.

(iii) $\frac{S_n - n/\lambda}{n/\lambda^2} \overset{\text{approx.}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ für n gross.

d) Seien X_1 und X_2 Zufallsvariablen mit $E[X_1] = 8$ und $E[X_2] = 4$. Sei $Y^* = \max(X_1, X_2)$ und $Y_* = \min(X_1, X_2)$ mit $E[Y_*] = 2$. Wie gross ist dann $E[Y^*]$? *Hinweis:* Sind $a, b \in \mathbb{R}$, so ist $a + b = \max(a, b) + \min(a, b)$.

(i) $E[Y^*] = 12$

(ii) $E[Y^*] = 6$

(iii) $E[Y^*] = 10$

Bitte wenden!

e) Sei X eine Zufallsvariable mit $P[X = -1] = P[X = 0] = P[X = 1] = 1/3$. Dann gilt

(i) $E[e^X] = \frac{1+\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}}{3}$

(ii) $E[e^X] = 1$

(iii) $E[e^X] = \frac{2\mathrm{e}}{3}$

f) In einer Gruppe von 1000 Leuten haben 70% ein Smartphone und 30% ein herkömmliches Mobiltelefon. Wir wählen nun zufällig 200 Leute aus. Darunter befindet sich eine Anzahl S der Leute, die ein herkömmliches Mobiltelefon besitzen. Berechnen Sie $P[S = 10]$.

(i) $P[S = 10] = \frac{\binom{300}{10}\binom{700}{190}}{\binom{1000}{200}}$

(ii) $P[S = 10] = \binom{200}{10}(\frac{3}{10})^{10}(\frac{7}{10})^{190}$

(iii) $P[S = 10] = \frac{\binom{300}{10}}{\binom{1000}{200}} + \frac{\binom{700}{190}}{\binom{1000}{200}}$

g) Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[Y] = \mathrm{Cov}[X, Y] = 1$. Dann ist

(i) $\mathrm{Var}[2X - Y] = 3$

(ii) $\mathrm{Var}[2X - Y] = 1$

(iii) $\mathrm{Var}[2X - Y] = 9$

h) Definiere $P[X = k] = C\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k \in \mathbb{N} = \{\mathbf{1}, 2, \cdots\}$. Dann ist

(i) $C = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda})^{-1}$

(ii) $C = (1 + \mathrm{e}^{-\lambda})^{-1}$

(iii) $C = 1$

i) Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen und alle Varianzen unten sind endlich. Dann gilt:

(i) $\mathrm{Var}[XY] = \mathrm{Var}[X]\mathrm{Var}[Y]$

(ii) $\mathrm{Var}[XY] = (\mathrm{Var}[X] + E[X]^2)E[Y^2] - E[XY]^2$

(iii) $\mathrm{Var}[XY] = E[X^2]E[Y^2] - E[XY]$

Siehe nächstes Blatt!

j) Seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen mit folgender gemeinsamer Gewichtsfunktion $p(x, y) = P[X = x, Y = y]$:

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$	$p_X(x)$
$X = 0$	0	0.25	0	0.25
$X = 1$	0.25	0.25	0.25	0.75
$p_Y(y)$	0.25	0.5	0.25	

Welche der Aussagen ist korrekt?

(i) X und Y sind unkorreliert und unabhängig.

(ii) X und Y sind korreliert und abhängig.

(iii) X und Y sind unkorreliert und abhängig.

Bitte wenden!

2. (10 Punkte)

a) Super Mario pflückt Pilze. Ein Pilz ist unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit p giftig. Falls Super Mario einen giftigen Pilz isst, wird er mit Wahrscheinlichkeit q_1 krank, falls er zwei giftige Pilze isst, wird er mit Wahrscheinlichkeit q_2 krank. Falls er nur gute Pilze isst, wird er mit Wahrscheinlichkeit q_0 krank. Super Mario kocht eine Suppe, die genau zwei Pilze enthält.

i) Sei S_2 die Anzahl giftiger Pilze in der Suppe. Welche Verteilung hat S_2?

ii) Super Mario isst nun die Suppe und wird krank. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthielt die Suppe mindestens einen giftigen Pilz?

b) Ein System bestehend aus zwei unabhängigen Komponenten funktioniert so lange, wie beide Komponenten funktionieren. Eine Komponente des Systems fällt an einem Tag mit Wahrscheinlichkeit p aus, die Ausfälle an verschiedenen Tagen seien unabhängig. Sei K_i die Wartezeit (in Tagen) bis zum ersten Ausfall der Komponente i, $i = 1, 2$, und K die Wartezeit bis zum ersten Ausfall des Systems.

i) Bestimmen Sie die Gewichtsfunktion von K_1.

ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit dauert es länger als n Tage bis zum ersten Ausfall des Systems?

Siehe nächstes Blatt!

3. (10 Punkte)

Sei Y die Maisernte (in tausend Tonnen) in einer Saison und X die Menge der Ernte, die wegen Frost verloren geht (in tausend Tonnen). Die gemeinsame Verteilung von X und Y ist gegeben durch

$$f_{X,Y}(x,y) = 3e^{-(y+2x)}, \quad 0 \leq x \leq y < \infty.$$

a) Berechnen Sie die Randdichte von X und die Randdichte von Y.

Für die folgenden Aufgaben können Sie $\int_0^\infty z^{k-1}e^{-\lambda z}dz = \lambda^{-k}(k-1)!,\ k \in \mathbb{N}$ benutzen.

b) Berechnen Sie die erwartete Maisernte und die erwartete Menge der Ernte, die wegen Frost verloren geht.

c) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y. Sind X und Y unabhängig?

Nun nehmen wir an, dass die Menge der Ernte, die wegen Frost verloren geht in verschiedenen Jahren unabhängig und identisch verteilt ist. Sei S die Gesamtmenge der Ernte, die wegen Frost während 36 Jahren verloren geht.
Hinweis: Falls Sie **3b)** nicht gelöst haben, nehmen Sie an, dass $X \sim Exp(4)$-verteilt ist. Achtung, dies liefert nicht die korrekte Lösung von **3a)**!

d) Berechnen Sie $\mathbb{E}[S]$ und $\text{Var}[S]$.

e) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass S grösser als 14 ist? Benutzen Sie eine geeignete Approximation.

4. (10 Punkte)

Ein Produzent von Computerchips entwickelt einen neuen Chip. Vor der Markteinführung werden n Prototypen produziert. Sei X_i die Anzahl Berechnungen des Prototyps i während seiner Lebenszeit in Millionen wobei $i = 1, \ldots, n$. Wir nehmen an, dass $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ wobei μ unbekannt und $\sigma^2 = 4$ ist. Der Produzent möchte seinem Kunden garantieren, dass ein neuer Chip im Mittel 13.92 Millionen Berechnungen ausführen kann.

a) Uns interessiert, ob ein neuer Chip im Mittel weniger als 13.92 Millionen Berechnungen ausführt. Führen Sie einen statistischen Test durch und definieren Sie die folgenden Elemente dieses Tests:

i) Die Nullhypothese H_0.

ii) Die Alternativhypothese H_A.

ii) Die Teststatistik $T^{(n)}$ und ihre Verteilung unter H_0.

iv) Den Verwerfungsbereich $K_\alpha^{(n)}$.

b) Nun nehmen wir an, dass $n = 9$ and $\overline{x}_9 = 12.42$. Führen Sie den Test auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$ durch und geben Sie den Testentscheid an.

c) Was ist das kleinste Signifikanzniveau α^* für welches die Nullhypothese H_0 verworfen wird, wenn man weiss, dass $n = 9$ und $\overline{x}_9 = 12.42$?

d) Wie viele Prototypen braucht man, um abzusichern, dass $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ unter H_0 mit Wahrscheinlichkeit 0.95 im Intervall $[0.9\mu_0, 1.1\mu_0]$ liegt?
Hinweis: Benutzen Sie die Approximation $(1.96/13.92)^2 \approx 0.02$.

Viel Erfolg!

Siehe nächstes Blatt!

Antwortblatt zur Aufgabe 1

Bitte benützen Sie dieses Blatt um die Aufgabe 1 zu lösen, indem Sie an der entsprechenden Stelle ein Kreuz machen. Falls es in einer Zeile kein oder mehr als ein Kreuz hat, wird dies als “keine Antwort” (k. A.) gewertet.

Nur hier ausfüllen

	Antw. (i)	Antw. (ii)	Antw. (iii)	k. A.
1a)				
1b)				
1c)				
1d)				
1e)				
1f)				
1g)				
1h)				
1i)				
1j)				

Bitte nicht ausfüllen

richtig	falsch	k. A.

Das folgende bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe 1	Korr.	Kontr.
richtig		
falsch		
k. A.		
Punkte		