ETH Zürich SS 2016
Prof. Dr. P. Embrechts

August 2016

Prüfung

Wahrscheinlichkeit und Statistik

BSc INFK

Nachname	
Vorname	
Legi Nummer	

Das Folgende bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe	Max. Punkte	Summe	Kontrolle
1	10		
2	10		
3	10		
Total	**30**		

Hinweise zu Prüfung

Prüfungsdauer ⌚: 120 min.

Hilfsmittel: 10 A4–Seiten resp. 5 Blätter handgeschriebene oder geTEXte Zusammenfassung (Schriftgrösse ca. 12pt). Keine Taschenrechner erlaubt!

Bitte beachten Sie folgende Punkte ℹ:

- ☞ Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- ☞ Beginnen Sie für jede Aufgabe (nicht Teilaufgabe!) ein neues Blatt.
- ☞ Tragen Sie Ihren Vor–und Nachnamen auf das Deckblatt auf und schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen.
- ☞ Schreiben Sie nicht mit Bleistift, roter oder grüner Farbe.
- ☞ Um die volle Punktzahl zu erreichen, begründen Sie alle Resultate durch Zwischenschritte und Zwischenrechnungen und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.
- ☞ Lesen Sie alle Aufgaben durch, bevor Sie beginnen. Für eine genügende Note wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben in der Ihnen zur Verfügung gestellten Zeit lösen können.
- ☞ Es dürfen sich nur erlaubte Hilfsmittel auf dem Tisch befinden. Keine Mobiltelefone, Minicomputer oder sonstige elektronische Geräte.

★★★ Viel Erfolg! ★★★

Aufgabe 1.

(a) (**3 Punkte**) Eine Urne enthält 3 rote (R) und 3 blaue (B) Kugeln. Einer dieser Kugeln, nennen wir sie X, wird zufällig gezogen und dauerhaft aus der Urne entfernt ohne sie dem Beobachter zu zeigen. Der Beobachter muss nun *nacheinander mit zurücklegen* Kugeln aus der Urne ziehen und basierend auf den Beobachtungen Rückschlüsse darüber ziehen, welche Kugel X am Anfang entfernt wurde. Wir vergleichen zwei Szenarien.

Peter zieht 6 mal und jedes mal hat er rot (R) gezogen. Paula zieht 600 mal; 303 davon waren rot (R) und 297 waren blau (B). Welcher der beiden Personen kann mit grösserer (bedingter) Wahrscheinlichkeit behaupten, dass eine blaue (B) Kugel am Anfang entfernt wurde? Das heisst:

Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass zu Beginn eine blaue (B) Kugel gezogen wurde (d.h. $\{X = \mathrm{B}\}$), gegeben Peters/Paulas Beobachtung.

(b) (**2 Punkte**) Seien zwei Zufallsvariablen X und Y mit folgenden Daten gegeben:

$$E[X] = 1, \quad \mathrm{Var}(X) = 4, \quad E[Y] = -2, \quad E[XY] = -1 \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(Y) = 9.$$

Berechnen Sie

$$\mathrm{Corr}(X, Y) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Var}\left(\frac{1}{3}(X - 5Y)\right).$$

(c) (**3 Punkte**) Sei $Z \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Es wird Ihnen folgendes Spiel angeboten:

Sie dürfen eine positive Zahl c auswählen. Wenn $Z > c$, dann bekommen Sie c CHF ausbezahlt, andernfalls bekommen Sie nichts.

Wie müssen Sie c wählen um die erwartete Auszahlung zu maximieren? Berechnen Sie dann die maximal erwartete Auszahlung.

(d) (**2 Punkte**) Sei (X_n) i.i.d. Exp(2)-verteilt. Berechnen Sie den P-f.s. Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{X_k}.$$

Aufgabe 2.

Seien $X \sim \mathrm{Exp}(1)$ und $Y \sim \mathrm{Exp}(2)$ zwei unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter 1 bzw. 2. Wir definieren $U := X + Y$.

(a) (**3 Punkte**) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_U und die Dichtefunktion f_U von U.

(b) (**2 Punkte**) Berechnen Sie die Korrelation $\mathrm{Corr}(X, U)$.

(c) (**3 Punkte**) Seien $U_1, U_2, \ldots, U_{20}$ i.i.d. $\sim F_U$. Setze $S_{20} := \sum_{k=1}^{20} U_k$. Verwenden Sie die Chebyshev-Ungleichung um für $P[20 < S_{20} < 40]$ eine untere Schranke anzugeben.

(d) (**2 Punkte**) Benutzen Sie den zentralen Grenzwertsatz um eine Approximation der Wahrscheinlichkeit $P[25 \leq S_{20} \leq 35]$ anzugeben.

Aufgabe 3.

Beim Ausfall eines bestimmtem Maschinenaggregats ist es erforderlich, dass jeweils eine gewisse Anzahl von Teilen der Typen A, B und C ausgewechselt werden. Die Arbeitszeiten für das Auswechseln der einzelnen Ersatzteile der Typen A, B und C seien unabhängige und ausreichend genau normalverteilte Zufallsvariablen mit den Mittelwerten $\mu_A = \mu_B = 18$ Minuten, $\mu_C = 38$ Minuten mit Standardabweichungen $\sigma_A = \sigma_B = 1.5$ Minuten und $\sigma_C = 3$ Minuten.

(a) (**3 Punkte**) Bei einem bestimmten Defekt des Maschinenaggregats ist es erforderlich, 2 Teile vom Typ A, 2 Teile vom Typ B und 1 Teil vom Typ C nacheinander auszuwechseln. Berechnen Sie die erwartete Gesamtarbeitszeit für das Auswechseln dieser 5 Teile sowie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Gesamtarbeitszeit höchstens 2 Stunden beträgt.
Hinweis: Sie dürfen folgende Approximationen verwenden:

$$\frac{10}{3\sqrt{2}} \approx 2.36, \qquad \frac{10}{3\sqrt{3}} \approx 1.92, \qquad \frac{5}{\sqrt{3}} \approx 2.87.$$

(b) (**5 Punkte**) Um zu überprüfen, ob bei einem auf das Auswechseln der Teile vom Typ C *spezialisierten* Monteur die Arbeitszeit ebenfalls nach der Normalverteilung $\mathcal{N}(38, 9)$-verteilt ist, wurde ermittelt, dass der Monteur für das Auswechseln von 10 Teilen des Typs C insgesamt genau 6 Stunden benötigte.

Führen Sie diese Überprüfung durch, indem Sie mittels einseitigem z-test eine geeignete Nullhypothese (und Alternative) formulieren und diese mit einem Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ testen. D.h. geben Sie die folgenden Daten an:

(1) das Modell;
(2) H_0 sowie H_A;
(3) die Teststatistik T sowie den Verwerfungsbereich K;
(4) die Verteilung von T unter H_0;
(5) den Testentscheid.

Hinweis: Sie dürfen folgende Approximationen verwenden:

$$\frac{3}{4}\sqrt{10} \approx 2.37, \qquad \frac{2}{3}\sqrt{10} \approx 2.11, \qquad 2\sqrt{\frac{10}{3}} \approx 3.65.$$

(c) (**2 Punkte**) Berechnen Sie das kleinste Niveau α^*, auf dem der Test die Nullhypothese noch verwirft.