Prof. Dr. P. Embrechts | ETH Zürich | Winter 2012/2013

Wahrscheinlichkeit und Statistik
BSc D-INFK

1. **a)** (i) **b)** (ii) **c)** (i) **d)** (iii) **e)** (i) **f)** (iii) **g)** (i) **h)** (ii) **i)** (iii) **j)** (i)

2. **a)** Wir definieren die folgenden Ereignisse

$$\begin{aligned} S_P &= \{\text{Passstrasse von A nach B ist befahrbar}\} \\ S_T &= \{\text{Strassentunnel von A nach B ist befahrbar}\} \\ S_L &= \{\text{Landstrasse von B nach C ist befahrbar}\} \\ S_A &= \{\text{Autobahn von B nach C ist befahrbar}\} \\ Z &= \{\text{Zugverbindung ist nicht blockiert}\}. \end{aligned}$$

i) Sei AC das Ereignis, dass man von A nach C gelangen kann. Es gilt

$$\begin{aligned} P[AC] &= P[((S_P \cup S_T) \cap (S_L \cup S_A)) \cup Z] \\ &= P[(S_P \cup S_T) \cap (S_L \cup S_A)] + P[Z] - P[(S_P \cup S_T) \cap (S_L \cup S_A) \cap Z] \\ &= P[S_P \cup S_T]P[S_L \cup S_A] + P[Z] - P[S_P \cup S_T]P[S_L \cup S_A]P[Z] \\ &= P[S_P \cup S_T]P[S_L \cup S_A](1 - P[Z]) + P[Z] \\ &= (P[S_P] + P[S_T] - P[S_P]P[S_T])\,(P[S_L] + P[S_A] - P[S_L]P[S_A])\,(1 - P[Z]) \\ &\quad + P[Z] \\ &= (2(1-p_1) - (1-p_1)^2)^2 p_2 + (1 - p_2) \\ &= (1 - p_1^2)^2 p_2 + (1 - p_2). \end{aligned}$$

ii) Sei AB das Ereignis, dass man mit dem Auto von A nach B gelangen kann.

Bitte wenden!

Wir haben

$$\begin{aligned}
P[AB|(S_P^c \cup S_T^c)] &= \frac{P[(AB \cap S_P^c) \cup (AB \cap S_T^c)]}{P[S_P^c \cup S_T^c]} \\
&= \frac{P[AB \cap S_P^c] + P[AB \cap S_T^c] - P[AB \cap S_P^c \cap S_T^c]}{P[S_P^c] + P[S_T^c] - P[S_P^c \cap S_T^c]} \\
&= \frac{P[S_T \cap S_P^c] + P[S_P \cap S_T^c]}{P[S_P^c] + P[S_T^c] - P[S_P^c]P[S_T^c]} \\
&= \frac{P[S_T]P[S_P^c] + P[S_P]P[S_T^c]}{P[S_P^c] + P[S_T^c] - P[S_P^c]P[S_T^c]} \\
&= \frac{2p_1(1-p_1)}{2p_1 - p_1^2} = \frac{2(1-p_1)}{2-p_1}.
\end{aligned}$$

b) i) Gegeben, dass Felix insgesamt 12 E-Mails erhalten hat, ist die Anzahl E-Mails auf der Privatadresse N_P Binomialverteilt mit $n = 12$ und p, und somit

$$P[N_P = 2|T = 12] = \binom{12}{2} p^2 (1-p)^{10}.$$

ii) Allgemeiner gilt für $k \leq n$

$$P[N_P = k|T = n] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit folgt daher für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
p_{N_P}(k) = P[N_P = k] &= \sum_{n=k}^{\infty} P[N_P = k|T = n] P[T = n] \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n \geq k} \frac{((1-p)\lambda)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{l \geq 0} \frac{((1-p)\lambda)^l}{l!} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} \\
&= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Also ist N_P Poisson verteilt mit Parameter λp. Die Verteilungsfunktion ist dann

$$F_{N_P}(k) = \sum_{n=0}^{k} e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^n}{n!}.$$

Siehe nächstes Blatt!

3. **a)** 1. Lösungsweg:

$$\mathbb{E}[R] = \int_0^\infty x f_R(x) dx = \int_0^\infty \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x} dx$$
$$\overset{\text{Subs.}}{=} \int_0^\infty u^2 e^{-u} \frac{du}{\lambda} = \frac{\Gamma(3)}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}.$$

2. Lösungsweg:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R] &= \int_0^\infty x f_R(x) dx = \int_0^\infty \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x} dx \\ &\overset{\text{PI}}{=} \left[-\lambda x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx \\ &\overset{\text{PI}}{=} 2\left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = 2\left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^\infty = \frac{2}{\lambda}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\bar{F}_R(x_0) = \mathbb{P}[R > x_0] &= \int_{x_0}^\infty f_R(u) du = \int_{x_0}^\infty \lambda^2 u e^{-\lambda u} du \\ &\overset{\text{PI}}{=} \left[-\lambda u e^{-\lambda u}\right]_{x_0}^\infty + \int_{x_0}^\infty \lambda e^{-\lambda u} du = \lambda x_0 e^{-\lambda x_0} + \left[-e^{-\lambda u}\right]_{x_0}^\infty \\ &= e^{-\lambda x_0}(\lambda x_0 + 1).\end{aligned}$$

c) Sei $X = \min(R_1, R_2)$, dann ist

$$\begin{aligned}F_X(x) = \mathbb{P}[X \le x] &= \mathbb{P}[R_1 \le x \text{ oder } R_2 \le x] \\ &= 1 - \mathbb{P}[R_1 > x, R_2 > x] = 1 - (\bar{F}_R(x))^2 \\ &= 1 - e^{-2\lambda x}(\lambda x + 1)^2.\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}1 &\overset{!}{=} \int_{\mathbb{R}^2} f_{\Lambda,R}(\lambda, x) dx d\lambda = c\int_1^2 \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx d\lambda \\ &\overset{\text{PI}}{=} c\int_1^2 \left(\left[-\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x} dx\right) d\lambda \\ &= c\int_1^2 \frac{1}{\lambda^2} d\lambda = c\left[-\frac{1}{\lambda}\right]_1^2 = \frac{c}{2} \qquad \Rightarrow \qquad c = 2.\end{aligned}$$

Bitte wenden!

e)

$$
\begin{aligned}
f_R^*(x) &= c\int_1^2 xe^{-\lambda x}d\lambda = cx\left[\frac{-1}{x}e^{-\lambda x}\right]_1^2\\
&= c(e^{-x}-e^{-2x}) = 2(e^{-x}-e^{-2x}),\ x>0\\
f_\Lambda(\lambda) &= c\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx = c\left[-\frac{xe^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^\infty + \frac{c}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx\\
&= c/\lambda^2 = 2/\lambda^2,\ \lambda\in[1,2]
\end{aligned}
$$

f) Nein, weil $f_R^*(x)f_\Lambda(\lambda)\neq f_{\Lambda,R}(\lambda,x)$ für alle $\lambda\in[1,2]$ und $x>0$.

4. a) Um die Fairness des Spiels zu beurteilen, prüfen wir, ob der Mittelwert des Kontostands gleich dem Startwert $\mu_0 = 20$ ist. Da die X_i's i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ mit σ^2 unbekannt, führen wir einen t-Test für den Erwartungswert μ durch. Wir erhalten somit:

i) $H_0:\ \mu=\mu_0=20$

ii) $H_A:\ \mu\neq\mu_0$

iii) $T^{(n)}=\frac{\overline{X}_n-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t_{n-1}$ unter H_0 mit $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X}_n)^2$.

iv) $K_\alpha^{(n)}=(-\infty,-t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}})\cup(t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}},+\infty)$, wobei $t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ das $(1-\frac{\alpha}{2})$-Quantil der t-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden ist.

b) Es ist $n=9$ und wir müssen den Wert der Teststatistik $T^{(9)}(\omega)=t$ und den Verwerfungsbereich $K_{0.01}^{(9)}$ berechnen. Mit den Informationen der Daten erhalten wir

$$\overline{x}_9=\frac{\sum_{i=1}^9 x_i}{9}=\frac{225}{9}=25,\qquad s=5.$$

Somit folgt

$$t=\frac{\overline{x}_9-\mu_0}{s/\sqrt{9}}=\frac{25-20}{5/3}=3.$$

Für das Signifikanzniveau $\alpha=0.01$ haben wir $t_{8,0.995}=3.355$ und der Verwerfungsvereich ist $K_{0.01}^{(9)}=(-\infty,-3.355)\cup(3.355,+\infty)$. Da $t=3\notin K_{0.01}^{(9)}$, wird die Nullhypothese H_0 auf Niveau 1% nicht verworfen.

c) Mit bekannter Varianz $\sigma^2=100$ führen wir einen z-Test durch, und erhalten

i) $\tilde{T}^{(n)}=\frac{\overline{X}_n-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim\mathcal{N}(0,1)$ unter H_0.

ii) $\tilde{K}_\alpha^{(n)}=(-\infty,-z_{1-\frac{\alpha}{2}})\cup(z_{1-\frac{\alpha}{2}},+\infty)$, wobei $z_{1-\frac{\alpha}{2}}=\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$ das $(1-\frac{\alpha}{2})$-Quantil der $\mathcal{N}(0,1)$ Verteilung ist.

Siehe nächstes Blatt!

d) Der P-Wert ist das kleinste Signifikanzniveau α, sodass $\tilde{T}^{(9)}(\omega) = \tilde{t}$ das Verwerfen der Nullhypothese impliziert. Wir berechnen

$$P_{H_0}[|\tilde{T}^{(9)}| > \tilde{t}].$$

Da $\tilde{t} = \frac{\overline{x}_9 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{9}} = \frac{25-20}{10/3} = 1.5$, erhalten wir:

$$P_{H_0}[|\tilde{T}^{(9)}| > 1.5] = P_{H_0}[\tilde{T}^{(9)} > 1.5] + P_{H_0}[\tilde{T}^{(9)} < -1.5] = 2(1-\Phi(1.5)) = 0.1336.$$