Prof. Dr. P. Embrechts ETH Zürich Winter 2012/2013

Wahrscheinlichkeit und Statistik
BSc D-INFK

Name:	
Vorname:	
Stud. Nr.:	

Das Folgende bitte nicht ausfüllen!

Aufg.	Summe	Kontr.	Pkte.-Max.
1			10
2			10
3			10
4			10

Punktetotal:	
Vollständigkeit:	

Bitte wenden!

Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 2 Stunden.

Hilfsmittel: 10 A4-Seiten resp. 5 Blätter Zusammenfassung. Kein Taschenrechner!

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Tragen Sie Ihre Daten in dieses Deckblatt ein und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, rotem oder grünem Kugelschreiber.
- Um die volle Punktzahl zu erreichen, begründen Sie alle Resultate durch Zwischenschritte und -rechnungen (ausser Aufgabe 1) und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.
- Lesen Sie alle Aufgaben durch, bevor Sie beginnen. Für eine genügende Note wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben in der Ihnen zur Verfügung stehenden Zeit lösen können.
- Es dürfen sich nur erlaubte Hilfsmittel auf dem Tisch befinden, d.h. 10 A4-Seiten resp. 5 Blätter Zusammenfassung. Kein Taschenrechner!

Siehe nächstes Blatt!

Aufgaben

---

1. (10 Punkte)

Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig. Es gibt pro richtig beantwortete Frage 1 Punkt, pro falsche Antwort $1/2$ Punkt Abzug und für keine Antwort 0 Punkte . Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte. **Bitte benützen Sie das beiliegende Antwortblatt**.

a) Sei X eine positive Zufallsvariable mit Dichte f. Dann gilt:

(i) $E[e^{\sqrt{X}}+2] = \int_0^\infty e^{\sqrt{x}} f(x)dx + 2$

(ii) $E[e^{\sqrt{X}}+2] = \int_0^\infty f(e^{\sqrt{x}}+2)dx$

(iii) $E[e^{\sqrt{X}}+2] = \int_{-\infty}^\infty (e^{\sqrt{x}} f(x) + 2)dx$

b) Seien A und B beliebige Ereignisse mit $P[A \cap B] = 0.3$ und $P[A] = 0.5$. Dann gilt:

(i) $P[B] = 0.2$

(ii) $P[B] \leq 0.8$

(iii) $P[B] \geq 0.8$

c) Seien X und Y zwei unkorrelierte Zufallsvariablen. Dann gilt:

(i) $\text{Var}[2X+Y] = 4\text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$

(ii) $\text{Var}[2X+Y] = 2\text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$

(iii) $\text{Var}[2X+Y] \leq \frac{1}{4}\text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$

d) Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $f_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$ und sei $Y = e^X$. Was ist die Dichte $f_Y(y)$, $y > 0$ der Zufallsvariable Y?

(i) $f_Y(y) = \frac{f_X(y)}{y}$

(ii) $f_Y(y) = F_X(\log(y))$

(iii) $f_Y(y) = \frac{f_X(\log(y))}{y}$

e) Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Dann gilt für den Korrelationskoeffizienten ϱ:

(i) $\varrho(X, X^2) = 0$

(ii) $\varrho(X, X^2) < 0$

(iii) $\varrho(X, X^2) > 0$

Bitte wenden!

f) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(i) Die Summe zweier normal verteilten Zufallsvariablen ist immer normal verteilt.

(ii) Sind die Zufallsvariablen X und Y unkorreliert, so sind sie auch unabhängig.

(iii) Ist $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und U eine von X unabhängige Zufallsvariable mit $P[U=+1] = P[U=-1] = 1/2$, so ist $UX \sim \mathcal{N}(0,1)$.

g) Angenommen, dass $P[X=2] = 1$, dann gilt:

(i) Var$[X] = 0$ und $E[X] = 2$

(ii) Var$[X] = 1$ und $E[X] = 2$

(iii) Var$[X] = 0$ und $E[X] = 1$

h) Sei $X \sim \mathcal{U}(1,2)$ und Y eine von X unabhängige Zufallsvariable mit $P[Y=2] = \frac{1}{4}$ und $P[Y=1] = \frac{3}{4}$. Was ist dann $P[\frac{X}{Y} \leq 1]$?

i) $P[\frac{X}{Y} \leq 1] = \frac{1}{8}$

ii) $P[\frac{X}{Y} \leq 1] = \frac{1}{4}$

iii) $P[\frac{X}{Y} \leq 1] = \frac{3}{4}$

i) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(i) Ein konsistenter Schätzer is immer erwartungstreu.

(ii) Ein erwartungstreuer Schätzer ist immer konsistent.

(iii) Für einen erwartungstreuen Schätzer ist der mittlere quadratische Schätzfehler immer gleich der Varianz des Schätzers (gegeben, dass die Varianz existiert).

j) Gegeben ein Test zum Niveau α und P-Wert p, welche der folgenden Aussagen stimmt?

(i) Falls $p < \alpha$, dann wird die Nullhypothese auf Niveau α verworfen .

(ii) Falls $p < \alpha$, dann wird die Nullhypothese auf Niveau α nicht verworfen.

(iii) Den P-Wert und das Niveau α eines Tests kann man nicht vergleichen.

Siehe nächstes Blatt!

2. (10 Punkte)

a) Von Tal A kann man Tal B über eine Passstrasse oder durch einen Strassentunnel mit dem Auto erreichen. Von Tal B kann man über eine Landstrasse oder über eine Autobahn nach C fahren. Ausserdem gibt es eine direkte Zugverbindung von Tal A nach C. Weitere Verbindungen gibt es nicht. Jede der 4 Strassen ist unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit p_1 nicht befahrbar. Die Zugverbindung ist unabhängig von allen verschiedenen Strassenverbindungen mit Wahrscheinlichkeit p_2 blockiert.

Hinweis: Eine Skizze könnte hilfreich sein.

i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man von Tal A nach C gelangen?

ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man mit dem Auto von Tal A nach Tal B gelangen, wenn man weiss, dass mindestens eine der Strassen von Tal A nach Tal B (Passstrasse oder Strassentunnel) blockiert ist?

b) Felix hat zwei E-Mail Adressen, eine Private und eine Geschäftsadresse. Die totale Anzahl E-Mails T, die er an einem Tag erhält sei Poisson verteilt mit Parameter λ. Jedes der T E-Mails komme unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit p auf der Privatadresse an.

i) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Felix gestern auf der Privatadresse genau 2 E-Mails erhalten hat, wenn man weiss, dass er gestern insgesamt 12 E-Mails erhalten hat?

ii) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion der Anzahl E-Mails N_P auf der Privatadresse an einem Tag. Wie heisst diese Verteilung?

Bitte wenden!

3. (10 Punkte)

Ein Kunde schickt eine Datenbankanfrage an einen Server. Die Reaktionszeit R des Servers hat folgende Dichtefunktion

$$f_R(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}, \quad x > 0. \tag{1}$$

a) Berechnen Sie die erwartete Reaktionszeit des Servers.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Raktionszeit des Servers die Schranke $x_0 > 0$ überschreitet.

Wir betrachten nun zwei Server, deren Reaktionszeiten R_1, R_2 i.i.d. sind und Dichtefunktion (1) haben. Ein Kunde schickt gleichzeitig dieselbe Datenbankanfrage an beide Server.

c) Sei X die Zeit bis zur ersten Reaktionszeit. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X.

Sei nun Λ die Grösse der Datenbankanfrage und die gemeinsame Dichtefunktion der Zufallsvariablen Λ und R sei durch

$$f_{\Lambda,R}(\lambda, x) = cxe^{-\lambda x}, \quad \lambda \in [1,2],\ x \in (0,\infty)$$

gegeben.

d) Wie muss man c wählen, damit $f_{\Lambda,R}$ wirklich eine Dichtefunktion ist?

e) Berechnen Sie die Randdichte der Zufallsvariable R und die Randdichte der Zufallsvariable Λ.

f) Sind Λ und R unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Siehe nächstes Blatt!

4. (10 Punkte)

Auf einer Online-Poker Webseite muss jeder Spieler i ($i = 1, \ldots, n$) sein Konto bei der Anmeldung mit 20 CHF aufladen. Sei X_i der Kontostand des i-ten Spielers nach einer Stunde Spielzeit. Wir nehmen an, dass $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ verteilt sind. Die Webseite möchte inserieren, dass das angebotene Spiel *fair* ist. Diese Behauptung soll mit einem statistischen Test gestützt werden.

a) Geben Sie die folgenden Elemente des Tests an:

i) Die Nullhypothese H_0.

ii) Die Alternativhypothese H_A.

iii) Die Teststatistik $T^{(n)}$ und ihre Verteilung unter H_0.

iv) Den Verwerfungsbereich $K_\alpha^{(n)}$.

b) Um den Test durchzuführen wurden 9 Spieler ausgewählt und ihr Kontostand x_i ($i = 1, \ldots, 9$) wurde notiert. Aus diesen Daten wurden die folgenden Werte berechnet

$$\sum_{i=1}^{9} x_i = 225 \quad \text{und} \quad s^2 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{9} (x_i - \overline{x}_9)^2 = 25.$$

Führen Sie den Test auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$ durch und geben Sie den Testentscheid an.

c) Nach einigen Monaten haben die Betreiber der Webseite mehr Daten zur Verfügung und finden heraus, dass $\sigma^2 = 100$. Beschreiben Sie, wie sich die folgenden Elemente Ihres Tests ändern.

i) Geben Sie die Teststatistik $\tilde{T}^{(n)}$ und ihre Verteilung unter H_0 an.

ii) Geben Sie den Verwerfungsbereich $\tilde{K}_\alpha^{(n)}$ an.

d) Berechnen Sie den P-Wert der neuen Teststatistik $\tilde{T}^{(9)}$, wobei $\sum_{i=1}^{9} x_i = 225$.

Viel Erfolg!

Antwortblatt zur Aufgabe 1

Bitte benützen Sie dieses Blatt um die Aufgabe 1 zu lösen, indem Sie an der entsprechenden Stelle ein Kreuz machen. Falls es in einer Zeile kein oder mehr als ein Kreuz hat, wird dies als “keine Antwort” (k. A.) gewertet.

Nur hier ausfüllen

	Antw. (i)	Antw. (ii)	Antw. (iii)	k. A.
1a)				
1b)				
1c)				
1d)				
1e)				
1f)				
1g)				
1h)				
1i)				
1j)				

Bitte nicht ausfüllen

richtig	falsch	k. A.

Das folgende bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe 1	Korr.	Kontr.
richtig		
falsch		
k. A.		
Punkte		