ETH Zürich HS 2015
Prof. Dr. P. Embrechts **Januar 2016**

Prüfung

Wahrscheinlichkeit und Statistik

BSc INFK

Nachname	
Vorname	
Legi Nummer	

Das Folgende bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe	Max. Punkte	Summe	Kontrolle
1	10		
2	10		
3	10		
Total	**30**		

Hinweise zu Prüfung

Prüfungsdauer ⏲: 120 min.

Hilfsmittel: 10 A4–Seiten resp. 5 Blätter handgeschriebene oder geTEXte Zusammenfassung (Schriftgrösse ca. 12pt). Keine Taschenrechner erlaubt!

Bitte beachten Sie folgende Punkte ℹ:

- ☞ Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- ☞ Beginnen Sie für jede Aufgabe (nicht Teilaufgabe!) ein neues Blatt.
- ☞ Tragen Sie Ihren Vor–und Nachnamen auf das Deckblatt auf und schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen.
- ☞ Schreiben Sie nicht mit Bleistift, roter oder grüner Farbe.
- ☞ Um die volle Punktzahl zu erreichen, begründen Sie alle Resultate durch Zwischenschritte und Zwischenrechnungen und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.
- ☞ Lesen Sie alle Aufgaben durch, bevor Sie beginnen. Für eine genügende Note wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben in der Ihnen zur Verfügung gestellten Zeit lösen können.
- ☞ Es dürfen sich nur erlaubte Hilfsmittel auf dem Tisch befinden. Keine Mobiltelefone, Minicomputer oder sonstige elektronische Geräte.

★★★ Viel Erfolg! ★★★

Aufgabe 1.

(a) Die Seiten eines Würfels werden rot gefärbt. Danach wird der Würfel in 1'000 gleiche kleine Würfel zerlegt (d.h. $10 \times 10 \times 10$) und dann gemischt. Es wird nun zufällig ein kleiner Würfel gezogen.

(i) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass der gezogene Würfel genau zwei rote Seiten hat?

(ii) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass man mit dem gezogenen kleinen Würfel eine rote Seite *würfelt*?

(b) Seien zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y mit folgenden Daten gegeben:

$$E[X] = -1, \quad E[X^2] = 2, \quad E[Y] = -\frac{1}{6} \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(Y) = \frac{35}{36}.$$

Berechnen Sie

$$E[(X+3Y)^2] \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Var}\left(\frac{1}{2}(X-Y)\right).$$

(c) Sei eine Zufallsvariable X gegeben durch

$$X = \begin{cases} -1, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 30\% \\ 0, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 40\% \\ 2, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 30\%. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Momentenerzeugendenfunktion von X, $m(t) := E[e^{tX}]$, und anschliessend $m'(0)$ und $m''(0)$.

(d) Sei (X_n) i.i.d. $\mathcal{U}(-1, 10)$–verteilt. Berechne den P-f.s. Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k^3.$$

Aufgabe 2.

Die gemeinsame Dichtefunktion $f_{(X,Y)}$ zweier Zufallsvariablen X und Y ist gegeben durch

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} c, & \text{falls } x \in [0,4] \text{ und } 16y^2 \leq 9x, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $c > 0$ eine Konstante ist.

(a) Welchen Wert muss c haben damit $f_{(X,Y)}$ tatsächlich eine Dichtefunktion darstellt?

(b) Berechnen Sie die Randdichten f_X von X and f_Y von Y. Sind X und Y unabhängig?

(c) Berechnen Sie $E[X]$ und $E[Y]$.

Falls Sie (c) nicht gerechnet haben, verwenden Sie für (d) und (e) die Werte $E[X] = 0$ und $E[Y] = \frac{12}{5}$. Dies sind selbstverständlich nicht die korrekten Ergebnisse!

(d) Finden Sie $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

(e) Seien (X_k) i.i.d. mit gleicher Verteilung wie $X + Y$. Was ist approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass $S_{10'000} = \sum_{k=1}^{10'000} X_k$ grösser ist als $24'000$?

Siehe nächtes Blatt!

Aufgabe 3.

Der Rektor einer Sekundarschule möchte gerne im Rahmen einer kleinen Studie ermitteln ob sich der Intelligenzquotient (IQ) der Schüler signifikant vom Durchschnitt der Bevölkerung ($\mu_0 = 100$) unterscheidet. Dafür benutzt er die Resultate des PISA (Programme of International Student Assessment) Tests. Es wird angenommen, dass das Testergebnis dem IQ entspricht.

Es liegen Testergebnisse von insgesamt 121 Schüler vor. Dabei wird angenommen, dass die 121 Testergebnisse Realisationen von i.i.d. normalverteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{121}$ sind mit (unbekanntem) Erwartungswert μ und (unbekannter) Varianz σ^2.

(a) Geben Sie die folgenden Elemente des Tests an:

(i) Die Nullhypothese H_0 und die Alternative H_A.

(ii) Die Teststatistik T und ihre Verteilung unter H_0.

(iii) Den Verwerfungsbereich K_α zum Niveau α, $\alpha \in (0,1)$[1].

(b) Nach Auswertung der PISA-Tests wurden folgende Daten ermittelt:

$$\overline{x}_{121} = \frac{1}{121}\sum_{k=1}^{121} x_k = 96 \qquad \text{und} \qquad s_{121} = \sqrt{\frac{1}{120}\sum_{k=1}^{121}(x_k - \overline{x}_{121})^2} = 22.$$

Führen Sie den Test (aus (a)) zum Niveau $\alpha = 1\%$ durch und geben Sie den Testentscheid an.

(c) Aus einer zuverlässigen Quelle erfährt der Rektor, dass $\sigma^2 = (20)^2$ eine gute Approximation der wahren Varianz ist. Was ändert beim Test aus (a)? Geben Sie die Verteilung der Teststatistik $\widetilde{T}$ unter H_0 and sowie den Verwefungsbereich $\widetilde{K}_\alpha$. Wie lautet der Testentscheid, wenn $\alpha = 5\%$?

(d) Berechnen Sie den P-Wert in (c), d.h. das kleinste Niveau α^* auf dem der Test die Nullhypothese H_0 gerade noch verwirft.

[1] Hier wurde ein Tippfehler korrigiert, der während der Prüfung erkannt wurde.