

D-INFK

Prüfung Wahrscheinlichkeit und Statistik

401-0614-00L

Nachname

XX

Vorname

XX

Legi-Nr.

XX-000-000

Prüfungs-Nr.

000

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Answerheft.

Aufgabe 1

Christina wirft zwei sechseitige Würfel. Seien die Augenzahlen X und Y .

1.MC1 [1 Punkt] Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass X gerade ist und Y durch 3 teilbar ist?

- (A) $1/12$ (C) $1/3$
(B) $1/6$ (D) $5/6$

1.MC2 [2 Punkte] Was ist $\mathbb{P}[X > Y]$?

- (A) $1/3$ (C) $1/2$
(B) $5/12$ (D) $7/12$

1.MC3 [1 Punkt] Was ist $\mathbb{P}[X + Y \geq 7 \mid X = 2]$?

- (A) $1/3$ (C) $2/3$
(B) $1/2$ (D) $5/6$

1.MC4 [2 Punkte] Was ist $\mathbb{P}[X = 5 \mid X + Y = 10]$?

- (A) $1/3$ (C) $2/3$
(B) $1/2$ (D) $5/6$

1.MC5 [1 Punkt] Was ist der Erwartungswert $\mathbb{E}[(X - 3)(Y - 1)^2]$?

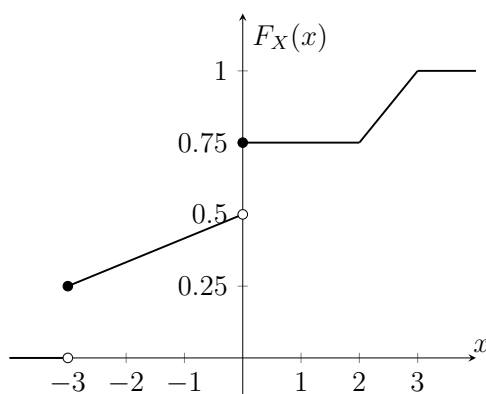
- (A) $37/12$ (C) $49/12$
(B) $43/12$ (D) $55/12$

Aufgabe 2

2.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Mengen ist **keine** σ -Algebra?

- (A) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
 (B) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{A, B, C\}\}$
 (C) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{\clubsuit\}, \{\spadesuit\}\}$
 (D) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\}$

2.MC2 [2 Punkte] Wir betrachten die folgende Verteilungsfunktion F_X einer Zufallsvariable X . Welche der folgenden Wahrscheinlichkeiten ist **am kleinsten**?



- (A) $\mathbb{P}[-3 \leq X < 0]$ (C) $\mathbb{P}[-1 \leq X \leq 1]$
 (B) $\mathbb{P}[0 \leq X \leq 3]$ (D) $\mathbb{P}[-3 < X \leq 0]$

2.MC3 [2 Punkte] Welche der folgenden Ungleichungen gilt **nicht** für alle beschränkten Zufallsvariablen $X \geq 0$ und alle Konstanten $\lambda > 0$?

- (A) $\mathbb{P}[X \geq \lambda] \leq \mathbb{E}[X]/\lambda$
 (B) $\mathbb{P}[X \geq \lambda + \mathbb{E}[X]] \leq \text{Var}(X)/\lambda^2$
 (C) $\mathbb{P}[X \geq \lambda] \leq \exp(\mathbb{E}[X] - \lambda)$
 (D) $\mathbb{P}[X \geq \lambda] \leq \mathbb{E}[\exp(2X - 2\lambda)]$

2.MC4 [2 Punkte] Seien X_1, X_2, \dots i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] = 0$ und $\mathbb{E}[X_1^2] = \sigma^2 < \infty$. Welche der folgenden Grenzen gilt als $n \rightarrow \infty$?

- (A) $\mathbb{P}[X_1 + \dots + X_n \geq 1.65\sqrt{n}\sigma] \rightarrow 0.05$
 (B) $\mathbb{P}[X_1 + \dots + X_n \geq 1.96\sqrt{n}\sigma] \rightarrow 0.05$
 (C) $\mathbb{P}[X_1 + \dots + X_n \geq 1.65n^2\sigma] \rightarrow 0.05$
 (D) $\mathbb{P}[X_1 + \dots + X_n \geq 1.96n^2\sigma] \rightarrow 0.05$

2.MC5 [1 Punkt] Sei $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in (0, \infty)}$ eine Modellfamilie, so dass unter \mathbb{P}_θ , $X_1, X_2, \dots > 0$ i.i.d. Zufallsvariablen sind mit $\mathbb{E}_\theta[X_1] = \frac{1}{\theta}$. Betrachten Sie die Folge von Schätzern (T_n) , definiert durch $T_n = n(X_1 + \dots + X_n)^{-1}$. Welche der folgenden Aussagen gilt für (T_n) ?

- (A) (T_n) ist konsistent, aber nicht unbedingt erwartungstreu.
- (B) (T_n) ist erwartungstreu, aber nicht unbedingt konsistent.
- (C) (T_n) ist konsistent und erwartungstreu.
- (D) Im Allgemeinen muss (T_n) weder konsistent noch erwartungstreu sein.

2.MC6 [2 Punkte] Sei X eine einzelne Beobachtung der Verteilung $\mathcal{N}(\theta, 1)$, wobei θ unbekannt ist. Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \theta = 0$ und die Alternativhypothese $H_A : \theta = 1$. Welche der folgenden Mengen ist ein sinnvoller Verwerfungsbereich für X ?

- (A) $K = (1/2, \infty)$
- (B) $K = (2, \infty)$
- (C) $K = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
- (D) $K = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Aufgabe 3

Seien $U \sim \mathcal{U}[0, 2]$ und $B \sim \text{Ber}(p)$ unabhängige Zufallsvariablen.

3.MC1 [2 Punkte] Was ist $\mathbb{E}[U^4]$?

- (A) $1/5$ (B) 4 (C) $16/5$ (D) $32/5$

3.MC2 [2 Punkte] Was ist $\text{Var}(B + U)$?

- (A) $(p(1 - p) + 1/3)^2$ (C) $p(1 - p) + 1/3$
 (B) $(p(1 - p) + 4/3)^2$ (D) $p(1 - p) + 4/3$

Betrachten Sie jetzt die Zufallsvariable

$$Z = U^{B+1} = \begin{cases} U, & \text{falls } B = 0, \\ U^2, & \text{sonst.} \end{cases}$$

3.MC3 [2 Punkte] Was ist der Erwartungswert von Z ?

- (A) $4/3 - p/3$ (C) 1
 (B) $(4/3)^{p+1}$ (D) $1 + p/3$

3.MC4 [2 Punkte] Was ist die Verteilungsfunktion von Z ?

(A)

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \left((1-p)x + p\sqrt{x} \right) / 2 & \text{für } 0 \leq x < 2, \\ 1 - p + p\sqrt{x}/2 & \text{für } 2 \leq x < 4, \\ 1 & \text{für } x \geq 4. \end{cases}$$

(B)

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \left((1-p)x + p\sqrt{2x} \right) / 2 & \text{für } 0 \leq x < 2, \\ 1 & \text{für } x \geq 2. \end{cases}$$

(C)

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \left(8(1-p)x + px^2 \right) / 16 & \text{für } 0 \leq x < 2, \\ 1 - p + px^2/16 & \text{für } 2 \leq x < 4, \\ 1 & \text{für } x \geq 4. \end{cases}$$

(D)

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \left(2(1-p)x + px^2 \right) / 4 & \text{für } 0 \leq x < 2, \\ 1 & \text{für } x \geq 2. \end{cases}$$

Aufgabe 4

Ein Forscherteam hat im Wald eine Insektenfalle aufgestellt, um die Insektenpopulation täglich zu überwachen. An diesem Ort ist etwa die Hälfte der Tage warm und die andere Hälfte kalt. Ausserdem besteht an kalten Tagen eine Regenwahrscheinlichkeit von 40% und an warmen Tagen 20%. Abhängig vom Wetter hat die Anzahl der an einem Tag gefangenen Insekten die Verteilung $\text{Poi}(\lambda)$, wobei λ in der folgenden Tabelle angegeben ist.

λ	Kalt	Warm
Regnerisch	1	2
Sonnig	3	10

- 4.A1 [2 Punkte]** Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass mindestens drei Insekten gefangen werden, wenn der Tag kalt und regnerisch ist?
- 4.A2 [2 Punkte]** Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag keine Insekten gefangen werden?
- 4.A3 [2 Punkte]** Was ist die erwartete Anzahl gefangener Insekten pro Tag?
- 4.A4 [2 Punkte]** Bei der Betrachtung früherer Aufzeichnungen stellten die Forscher fest, dass am selben Tag im vergangenen Jahr keine Insekten gefangen wurden. Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der Tag warm und sonnig war?

Aufgabe 5

Seien $T \sim \mathcal{U}[1, 2]$, $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ und $Y \sim \text{Exp}(\gamma)$ unabhängige Zufallsvariablen, wobei $\lambda, \gamma > 0$.

5.A1 [1 Punkt] Was ist die gemeinsame Dichte $f_{T,X,Y}$ von (T, X, Y) ? (Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen.)

5.A2 [2 Punkte] Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von $\min(X, Y)$.

Raul wartet an einer Bushaltestelle. Es gibt zwei verschiedene Busse, die ihn zu seinem Ziel bringen und in $Z_1 = TX$ bzw. $Z_2 = TY$ Minuten ankommen, wobei die Zufallsvariable T das Verkehrsaufkommen in der Nähe darstellt.

5.A3 [1 Punkt] Was sind die Erwartungswerten von Z_1 und Z_2 ?

5.A4 [2 Punkte] Berechnen Sie die Kovarianz von Z_1 und Z_2 . Sind Z_1 und Z_2 unabhängig?

5.A5 [2 Punkte] Was ist die erwartete Zeit, die Raul auf die Ankunft eines Busses warten muss?

Aufgabe 6

Laura wirft Pfeile auf eine Dartscheibe, die durch $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$ dargestellt wird. Sei $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ eine Modellfamilie, so dass die Verteilung des Landeplatzes (X, Y) gegeben ist durch

$$f_\theta(x, y) = c_\theta(x^2 + y^2)^{\theta/2}, \quad (x, y) \in D,$$

wobei $c_\theta > 0$ eine Konstante ist.

6.A1 [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $\theta > -2$ und $c_\theta = \frac{\theta+2}{2\pi}$.

6.A2 [1 Punkt] Laura spielt n Runden und trifft die Punkte $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in D$. Wenn man davon ausgeht, dass die Punkte unabhängige Beobachtungen der Verteilung von (X, Y) sind, was ist die Likelihoodfunktion für θ ? (Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen.)

6.A3 [3 Punkte] Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer T_{ML} für θ .

Hinweis: Sie sollen auch zeigen, dass Ihre Kandidatenlösung tatsächlich der Maximierer ist.

6.A4 [3 Punkte] Bestimmen Sie ein approximatives Konfidenzintervall für T_{ML} mit Niveau 95%.

Hinweis: Sie können benutzen, dass $-\log R \sim \text{Exp}(\theta + 2)$, wobei $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

Tabelle der Standardnormalverteilung

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Zum Beispiel ist $\mathbb{P}[Z \leq 0.12] = 0.5478$.