D–INFK

# Prüfung Wahrscheinlichkeit und Statistik

401-0614-00L

*Nachname*
**XX**

*Vorname*
**XX**

*Legi-Nr.*
**XX-000-000**

*Prüfungs-Nr.*
***000***

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

# Aufgabe 1

Betrachten Sie drei Urnen mit grünen und roten Kugeln. Urne $A$ enthält 4 rote und 3 grüne Kugeln, Urne $B$ enthält 2 rote und 1 grüne Kugeln, und Urne $C$ enthält 1 rote und 2 grüne Kugeln.

**1.MC1 [1 Punkt]** Zwei Kugeln werden aus Urne $A$ ohne Zurücklegen gezogen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide rot sind?

(A) 12/49

(B) 2/7

(C) 16/49

(D) 16/9

**1.MC2 [2 Punkte]** Die zwei Kugeln werden in Urne $A$ zurückgelegt, und dann werden drei weitere Kugeln aus Urne $A$ ohne Zurücklegen gezogen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass nicht alle gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben?

(A) 4/35

(B) 5/7

(C) 6/7

(D) 31/35

**1.MC3 [2 Punkte]** Die drei Kugeln werden in Urne $A$ zurückgelegt. Simone wählt zufällig (mit gleicher Wahrscheinlichkeit) eine der Urnen $A, B, C$ aus und zieht daraus eine Kugel. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel rot ist?

(A) 11/21

(B) 4/7

(C) 13/21

(D) 2/3

**1.MC4 [2 Punkte]** Die Kugel, die Simone zog, war rot. Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass Urne $C$ ausgewählt wurde?

(A) 7/33

(B) 7/39

(C) 3/11

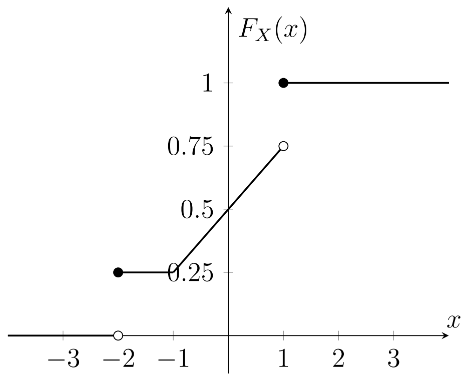
(D) 3/13

# Aufgabe 2

**2.MC1 [2 Punkte]** Seien $A, B$ zwei Ereignisse mit $\mathbb{P}[A] = 0.7$ und $\mathbb{P}[B] = 0.6$. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

(A) $\mathbb{P}[A \cup B] = 1$
(B) $\mathbb{P}[A \cap B] = 0.42$
(C) $\mathbb{P}[A \cup B] + \mathbb{P}[A \cap B] = 1.3$
(D) $\mathbb{P}[A \setminus B] = 0.1$

**2.MC2 [2 Punkte]** Wir betrachten die folgende Verteilungsfunktion $F_X$ einer Zufallsvariablen $X$. Welches der folgenden Ereignisse hat eine Wahrscheinlichkeit von $1/2$?




(A) $\{-2 < X \leq 1\}$
(B) $\{X < 1\}$
(C) $\{-2 \leq X < 0\}$
(D) $\{|X| = 2\}$

**2.MC3 [1 Punkt]** Was ist $\lim_{n\to\infty} e^{-4n} \sum_{k=2n}^{\infty} (4^k n^k / k!)$?

(A) 0
(B) 0.16
(C) 0.84
(D) 1

**2.MC4 [2 Punkte]** Seien $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ und $Y \sim \text{Exp}(\gamma)$ unabhängige Zufallsvariablen. Welchen Wert nimmt die gemeinsame Dichte von $(A, B) = (2X + Y, X + 2Y)$ bei $(3, 2)$ an?

(A) $f_{(A,B)}(3, 2) = 3\lambda\gamma \exp(-8\lambda - 7\gamma)$
(B) $f_{(A,B)}(3, 2) = \frac{\lambda\gamma}{3} \exp(-8\lambda - 7\gamma)$
(C) $f_{(A,B)}(3, 2) = 3\lambda\gamma \exp(-4\lambda/3 - \gamma/3)$
(D) $f_{(A,B)}(3, 2) = \frac{\lambda\gamma}{3} \exp(-4\lambda/3 - \gamma/3)$

**2.MC5 [1 Punkt]** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $X_n \sim \mathcal{U}[0, 1 + 1/n]$ und sei $X \sim \mathcal{U}[0, 1]$. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

(A) $X_n \to X$ in Verteilung, aber $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit gilt im Allgemeinen nicht.

(B) $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit, aber $X_n \to X$ in Verteilung gilt im Allgemeinen nicht.

(C) $X_n \to X$ in Verteilung und in Wahrscheinlichkeit.

(D) $X_n$ muss weder in Verteilung noch in Wahrscheinlichkeit gegen $X$ konvergieren.

**2.MC6 [2 Punkte]** Betrachten Sie die Modellfamilie $(P_\theta)_{\theta\in(0,\infty)}$, wobei $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen unter $P_\theta$ sind mit $X_1 \sim \mathrm{Poi}(\theta)$. Welcher der folgenden ist der beste Schätzer für $\theta$?

(A) $(X_1 + X_2)/2$

(B) $1/(X_1 + \cdots + X_n)$

(C) $\sqrt{(X_1^2 + \cdots + X_n^2)/n}$

(D) $(X_1 + \cdots + X_{n-2})/n$

# Aufgabe 3

Seien $X$ und $Y$ Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = x + y \quad \text{für } x, y \in [0,1].$$

**3.MC1 [2 Punkte]** Was ist die Randdichte von $X$?

(A) $f_X(x) = x^2 + 1$ für $x \in [0,1]$
(B) $f_X(x) = x + 1/2$ für $x \in [0,1]$
(C) $f_X(x) = 2x$ für $x \in [0,1]$
(D) $f_X(x) = 3x^2$ für $x \in [0,1]$

**3.MC2 [2 Punkte]** Was ist der Erwartungswert von $X$?

(A) $\mathbb{E}[X] = 5/12$
(B) $\mathbb{E}[X] = 1/2$
(C) $\mathbb{E}[X] = 7/12$
(D) $\mathbb{E}[X] = 3/4$

**3.MC3 [2 Punkte]** Was ist die Kovarianz von $X$ und $Y$?

(A) $\mathrm{Cov}(X,Y) = -1/12$
(B) $\mathrm{Cov}(X,Y) = -1/144$
(C) $\mathrm{Cov}(X,Y) = 23/144$
(D) $\mathrm{Cov}(X,Y) = 1/12$

**3.MC4 [2 Punkte]** Welcher der folgenden Werte ist am grössten?

(A) $f_{X|Y}(1 \mid 1)$
(B) $f_{X|Y}(1 \mid 1/2)$
(C) $f_{X|Y}(1/2 \mid 1)$
(D) $f_{X|Y}(1/2 \mid 0)$

# Aufgabe 4

Die Go-Weltmeisterin wurde zu einem Best-of-6-Match herausgefordert. Wenn die Herausforderin gewinnt, wird sie die neue Weltmeisterin. Die aktuelle Weltmeisterin gewinnt jedes Go-Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/3 und die Herausforderin mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/3. Sie können davon ausgehen, dass die Ergebnisse der Spiele unabhängig sind. Eine der Spielerinnen gewinnt das Best-of-6-Match, wenn sie mindestens 4 Spielen gewinnt.

**4.A1 [2 Punkte]** Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Herausforderin das Best-of-6-Match gewinnt?

Falls das Best-of-6-Match unentschieden endet, spielen die Herausforderin und die Weltmeisterin ein weiteres Best-of-2-Match in einem schnelleren Zeitformat. In diesem Format gewinnt die Weltmeisterin jedes Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von 3/5 und die Herausforderin mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/5. Wenn auch dieses Best-of-2-Match unentschieden endet, spielen sie ein weiteres Best-of-2-Match im gleichen Format usw., bis einer der Spieler ein Best-of-2-Match gewinnt.

**4.A2 [2 Punkte]** Nehmen Sie an, dass ein Best-of-2-Match gespielt wurde. Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Herausforderin es gewann, wenn wir wissen, dass es nicht unentschieden endete?

**4.A3 [2 Punkte]** Was ist für $n \geq 1$ die unbedingte Wahrscheinlichkeit, dass genau $n$ Best-of-2-Matches gespielt werden, bis eine Gewinnerin feststeht?

**4.A4 [2 Punkte]** Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Herausforderin den Meistertitel gewinnt?

# Aufgabe 5

Amanda plant, ihre Ersparnisse anzulegen. Sie hat zwei Aktien $A$ und $B$ identifiziert, an denen sie interessiert ist. Beide Aktien haben heute den Wert CHF 1. Basierend auf ihrer Analyse können die Preise der Aktien $A$ und $B$ in einem Jahr durch CHF $(1+X, 1+Y)$ modelliert werden, wobei $(X, Y)$ eine 2-dimensionale Normalverteilung hat mit $X \sim \mathcal{N}(0.1, 0.2^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(0.12, 0.4^2)$ und $\mathrm{Cov}[X, Y] = 0.064 = 8/125$.

**5.A1 [2 Punkte]** Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Aktie $A$ in einem Jahr wertvoller ist als heute?

**5.A2 [2 Punkte]** Berechnen Sie $\mathrm{Cov}[X, Y - aX]$ für $a \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie den Wert von $\hat{a} \in \mathbb{R}$, sodass $X$ und $\hat{Y} := Y - \hat{a}X$ unabhängig sind.

**5.A3 [2 Punkte]** Amanda möchte CHF 120 in die Aktien $A$ und $B$ investieren und erwägt zwei Strategien. Strategie (1) besteht darin, CHF 50 in Aktien $A$ und CHF 50 in Aktien $B$ zu investieren und CHF 20 auf der Bank zu belassen (wo sie keine Zinsen erhält). Bestimmen Sie die Verteilung von Amandas Vermögen nach einem Jahr, wenn sie Strategie (1) anwendet.

**5.A4 [2 Punkte]** Strategie (2) besteht darin, CHF 100 in Aktien $A$ und CHF 10 in Aktien $B$ zu investieren und CHF 10 auf der Bank zu belassen. Welche der beiden Strategien würden Sie Amanda empfehlen und warum?

# Aufgabe 6

Seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen. Betrachten Sie die Modellfamilie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in (0,\infty)}$, so dass $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. unter $\mathbb{P}_\theta$ sind mit $X_1 \sim \mathrm{Poi}(\theta)$.

**6.A1** [**2 Punkte**] Zeigen Sie, dass $T_M = (X_1 + \ldots + X_n)/n$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\theta$ ist. Berechnen Sie $\mathrm{MSE}_\theta(T_M)$.

Betrachten Sie die Nullhypothese $H_0 : \theta = 1$ und die Alternativhypothese $H_1 : \theta = 4$.

**6.A2** [**3 Punkte**] Zeigen Sie, dass der Verwerfungsbereich $K_\alpha$ für $T_M$, der den mächtigsten Test zum Niveau $\alpha$ definiert, gegeben ist durch $K_\alpha = (c_\alpha, \infty)$ für eine Konstante $c_\alpha > 0$.

**6.A3** [**4 Punkte**] Bestimmen Sie den approximativen Wert von $c = c_{0.95}$ für den Test $(T_M, K_{0.95})$ zum Niveau $\alpha = 95\%$. Was ist die Macht dieses Tests?