Wahrscheinlichkeit und Statistik - Musterlösung (BSc D-INFK)

1. (9 Punkte)

a) $P[A] = 1/2$ **b)** $5/16$ **c)** $E[X_1X_2] = 5$
d) $\mathcal{N}(1 + a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$ **e)** $\Gamma(2, \lambda)$ **f)** $\mathcal{N}(1/\lambda, 1/n\lambda^2)$
g) $F_Y(t) = 1 - F_X(\frac{1}{t}),\ f_Y(t) = \frac{1}{t^2} f_X(\frac{1}{t})$ **h)** Fehler 2. Art **i)** $\hat{\theta} = \frac{5}{\sum_{i=1}^5 x_i} = 4$

2. **a)** (1 Punkt) R nimmt nur die Werte $2, 3$ an, X nur die Werte $0, 1, 2$. Ausserdem ist auf Grund des Spielmodus $P[R = 2, X = 1] = 0$ und $P[R = 3, X = 0] = 0$. Daher gilt

$$\begin{aligned} P[R = 3, X = 2] &= 1 - P[R = 2, X = 0] - P[R = 2, X = 2] - P[R = 3, X = 1] \\ &= 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

b) (2 Punkte) Mit $F_1 \cap F_2 = \{R = 2, X = 2\}$ und $F_1^c \cap F_2^c = \{R = 2, X = 0\}$ gilt

$$\begin{aligned} P[F_2|F_1] &= \frac{P[F_2 \cap F_1]}{P[F_1]} = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2}, \\ P[F_2^c|F_1^c] &= \frac{P[F_2^c \cap F_1^c]}{P[F_1^c]} = \frac{1/4}{2/3} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

und somit $P[F_2|F_1^c] = 1 - P[F_2^c|F_1^c] = \frac{5}{8}$. Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit bekommt man schliesslich

$$P[F_2] = P[F_2|F_1]P[F_1] + P[F_2|F_1^c]P[F_1^c] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{12}.$$

c) (2 Punkte) N ist geometrisch verteilt mit Erfolgsparameter

$$p' = P[X \neq 2] = P[X = 0] + P[X = 1] = P[R = 2, X = 0] + P[R = 3, X = 1] = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

und hat Erwartungswert

$$E[N] = \frac{1}{p'} = \frac{12}{7}.$$

Bitte wenden!

3. **a)** (1 Punkt) Wegen der Normierungsbedingung muss es gelten, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_S(x)dx = 1.$$

Wir haben

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f_S(x)dx &= \int_0^{1000} \frac{1}{2000}dx + \int_{1000}^{\infty} cx^{-4}dx \\ &= \frac{1}{2} + c\int_{1000}^{\infty} x^{-4}dx \\ &= \frac{1}{2} + c(-\frac{x^{-3}}{3})|_{1000}^{\infty} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{c}{3 \cdot 1000^3}.\end{aligned}$$

Somit ist

$$c = (1 - \frac{1}{2}) \cdot 3 \cdot 1000^3 = \frac{3}{2}1000^3 (= 15 \cdot 10^8).$$

b) (1 Punkt) Die Verteilungsfunktion $F_S(x)$ ist definiert durch

$$F_S(x) = \int_{-\infty}^{x} f_S(y)dy.$$

Also haben wir $F_S(x) = 0$ für $x < 0$. Für $x \in [0, 1000]$ haben wir

$$F_S(x) = \int_0^x \frac{1}{2000}dy = \frac{x}{2000}.$$

Schliesslich für $x > 1000$

$$\begin{aligned}F_S(x) &= \int_0^{1000} \frac{1}{2000}dx + c\int_{1000}^{x} y^{-4}dy \\ &= \frac{1}{2} + c\left(-\frac{y^{-3}}{3}\right)|_{1000}^{x} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{c}{3}\left(\frac{1}{1000^3} - \frac{1}{x^3}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}1000^3}{3}\left(\frac{1}{1000^3} - \frac{1}{x^3}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1000}{x}\right)^3.\end{aligned}$$

Somit ist

$$F_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \frac{x}{2000} & \text{für } x \in [0, 1000], \\ 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1000}{x}\right)^3 & \text{für } x > 1000. \end{cases}$$

Siehe nächstes Blatt!

c) (2 Punkte) Für den Erwartungswert gilt

$$
\begin{aligned}
E[S] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_S(x) dx \\
&= \int_0^{1000} \frac{x}{2000} dx + \int_{1000}^{\infty} x \cdot c x^{-4} dx \\
&= \frac{1}{2000} \frac{x^2}{2} |_0^{1000} + c \int_{1000}^{\infty} x^{-3} dx \\
&= \frac{1000^2}{4000} + c \left(-\frac{x^{-2}}{2} \right) |_{1000}^{\infty} \\
&= 250 + \frac{c}{2 \cdot 1000^2} \\
&= 250 + \frac{\frac{3}{2} \cdot 1000^3}{2 \cdot 1000^2} \\
&= 1000.
\end{aligned}
$$

Für die Varianz gilt

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[S] &= E[S^2] - (E[S])^2 \\
&= E[S^2] - 10^6.
\end{aligned}
$$

Wir haben

$$
\begin{aligned}
E[S^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_S(x) dx \\
&= \int_0^{1000} \frac{x^2}{2000} + \int_{1000}^{\infty} x^2 \cdot c x^{-4} dx \\
&= \frac{1}{2000} \frac{x^3}{3} |_0^{1000} + c \int_{1000}^{\infty} x^{-2} dx \\
&= \frac{1000^3}{3 \cdot 2000} + c(-x^{-1}) |_{1000}^{\infty} \\
&= \frac{1}{6} 10^6 + \frac{3}{2} \frac{1000^3}{1000} \\
&= \frac{10}{6} 10^6.
\end{aligned}
$$

Also ist

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[S] &= \frac{10}{6} 10^6 - 10^6 \\
&= \frac{2}{3} 10^6.
\end{aligned}
$$

d) (2 Punkte) Der Anteil von Schadensfällen, die zur zweiten Kategorie gehören, beträgt

$$P[500 \leq S \leq 2000].$$

Bitte wenden!

Wir haben

$$\begin{aligned}
P[500 \leq S \leq 2000] &= F_S(2000) - F_S(500) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1000}{2000}\right)^3 - \frac{500}{2000} \\
&= 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{11}{16}.
\end{aligned}$$

In Prozent sind es also im Durchschnitt

$$\frac{11}{16} \cdot 100\% = \frac{11}{4} \cdot 25\% = 68.75\%$$

von den Schadensfällen, die zur zweiten Kategorie gehören.

e) (2 Punkte) Der Anteil von Schadensfällen, deren Schadenshöhe x ubersteigt, ist $P[S \geq x]$. Also suchen wir ein x, so dass

$$P[S \geq x] = 0.004 = 4 \cdot 10^{-3}.$$

Es ist klar, dass $x \geq \frac{1}{2}$ (sonst ist $P[S \geq x] \geq \frac{1}{2} > 4 \cdot 10^{-3}$), und für $x \geq \frac{1}{2}$ haben wir

$$P[S \geq x] = 1 - F_S(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1000}{x}\right)^3.$$

Also brauchen wir

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1000}{x}\right)^3 = 4 \cdot 10^{-3} \implies x = 5000.$$

Ein Schadensfall gehört zur höchsten Kategorie, wenn die Schadenshöhe mindestens 5000 ist.

Siehe nächstes Blatt!

4. **a)** (1 Punkt) Unter der Annahme, dass die Sendungen unabhängig sind, ist die Anzahl X der verlorenen Pakete Binom$(n, 0.05)$-verteilt.

b) (3 Punkte)

i) H_0: $p = 0.05$ (nicht betrügerisch)
H_A: $p > 0.05$ (betrügerisch)

ii) Aus der Tabelle

$$\mathbb{P}_{H_0}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}_{H_0}(X \leq 1) = 0.171 > \alpha$$
$$\mathbb{P}_{H_0}(X \geq 3) = 0.036 \leq \alpha.$$

Also ist der Verwerfungsbereich zum Niveau $\alpha = 5\%$ gleich $K = [3, 15]$. Da $2 \notin K$, wird die Nullhypothese nicht verworfen und somit ist *Shopper99* nicht als Betrüger anzusehen.

iii) P-Wert $\mathbb{P}_{H_0}(X \geq 2) = 0.171$.

c) (3 Punkte) $Y \sim$ Binom$(100, f^*)$

i) Der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt

$$\begin{aligned} f^* =& \mathbb{P}(H_0 \text{ verworfen}) \\ =& \mathbb{P}(H_0 \text{ verworfen} | \text{ nicht betrügerisch}) \cdot \mathbb{P}(\text{nicht betrügerisch}) \\ &+ \mathbb{P}(H_0 \text{ verworfen} | \text{ betrügerisch}) \cdot \mathbb{P}(\text{betrügerisch}) \\ =& \alpha(1 - f) + (1 - \beta) f \end{aligned}$$

ii) $\mathbb{E}[Y] = N f^* = N(\alpha + f(1 - \beta - \alpha))$. Also ist der Momenten-Schätzer für f

$$\hat{f}(Y) = \frac{Y/N - \alpha}{1 - \beta - \alpha}.$$

iii)

$$\hat{f}(8) = \frac{8/100 - 0.05}{0.20 - 0.05} = \frac{0.03}{0.15} = \frac{1}{5} = 20\%$$