

# Wahrscheinlichkeit und Statistik - Lösungen

## D-INFK

---

### 1. (10 Punkte)

Bei den folgenden 10 Fragen gibt es pro richtig beantwortete Frage 1 Punkt. Pro falsche Antwort gibt es 1/2 Punkt Abzug. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte.

a) Seien  $A$  und  $B$  zwei Ereignisse. Die Aussage  $P[A^c \cap B^c] = 1 - P[A \cap B]$  ist

1. wahr.
2. nicht wahr.

b) Seien  $A$  und  $B$  zwei Ereignisse. Das Additionsgesetz, d.h. die Formel

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B]$$

gilt, falls

1.  $A$  und  $B$  unabhängig sind.
  2.  $A$  und  $B$  disjunkt sind.
  3.  $A$  eine Teilmenge von  $B$  ist.
- c) Wir betrachten einen Labortest für eine Krankheit. Sei  $A$  das Ereignis, dass eine getestete Person die Krankheit hat. Sei  $B$  das Ereignis, dass der Test positiv ist. Man weiss  $P[B|A] = 0.99$  und  $P[B^c|A^c] = 0.995$ . Der Anteil der Bevölkerung, der die Krankheit hat, ist 0.1%. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Person mit einem positiven Test tatsächlich die Krankheit hat?
1.  $P[A|B] \approx 0.065$ .
  2.  $P[A|B] \approx 0.165$ .
  3.  $P[A|B] \approx 0.560$ .

**Siehe nächste Seite!**

- d) Seien  $X$  und  $Y$  unkorrelierte Zufallsvariablen mit Varianzen  $\text{Var}(X) = 2$  und  $\text{Var}(Y) = 3$ . Wie gross ist die Varianz von  $Z = 7X - 2Y$ ?
1. 86
  2. 110
  3. 8
- e) Ein fairer Würfel wird 1800mal geworfen. Die Zufallsvariable  $X$  sei die Anzahl der Würfe mit Augenzahl 6. Wie gross ist die Varianz von  $X$ ?
1. 1800
  2. 300
  3. 250
- f) Seien  $X \sim N(0, 1)$  und  $Y \sim \text{Unif}[0, 1]$  Zufallsvariablen mit  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ . Welche Aussage ist korrekt?
1.  $X$  und  $Y$  sind unabhängig.
  2.  $\mathbb{E}[XY] = 0$ .
  3. Keine der anderen beiden Aussagen trifft zu.
- g) Seien  $X$  und  $Y$  unabhängig und identisch  $\text{Poi}(\frac{9}{2})$  verteilt. Wie gross ist die Standardabweichung der Zufallsvariablen  $X + Y$ ?
1. 3
  2.  $\frac{9}{2}$
  3.  $\sqrt{\frac{9}{2}}$
- h) Die Zufallsvariable  $X$  habe eine Verteilungsfunktion  $F_X$  mit zugehöriger Dichte  $f_X$ . Sei  $Y = aX + b$ , mit  $a > 0$  und  $b \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für die Dichte  $f_Y$  von  $Y$
1.  $f_Y(y) = af_X(y) + b$
  2.  $f_Y(y) = f_X(\frac{y-b}{a})$
  3.  $f_Y(y) = \frac{1}{a}f_X(\frac{y-b}{a})$
- i) Welche der folgenden Funktionen ist **keine** Wahrscheinlichkeitsdichte? (Ausserhalb der angegebenen Intervalle ist immer  $f(x) = 0$ .)
1.  $f(x) = 0.5$  auf dem Intervall  $[-1.5, 0.5]$ .
  2.  $f(x) = 1 - x/2$  auf dem Intervall  $[0, 2]$ .
  3.  $f(x) = \exp(-3x)$  auf  $[0, \infty)$ .
  4. Alle könnten Wahrscheinlichkeitsdichten sein.

**Siehe nächste Seite!**

- j) Wir betrachten die normalverteilte Zufallsvariable  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  mit  $\mu = 1$  und  $\sigma^2 = 2$ . Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?
1.  $P[X \leq 0] > P[X \geq 3]$ .
  2. Die Fläche unter der Dichtefunktion im Intervall  $[1, 1 + \sqrt{2}]$  ist ca.  $1/3$ .
  3. Wenn wir  $X$  standardisieren, haben wir eine Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung 1.
  4. Für jeden Wert von  $\sigma^2 > 0$  ist die Dichte symmetrisch um 1, solange wir  $\mu = 1$  fest lassen.
  5. Nur bei der Normalverteilung stimmt die Standardabweichung immer mit der Wurzel der Varianz überein.

**Lösung:**

- a) 2.  $P[A^c \cap B^c] = P[(A \cup B)^c] = 1 - P[A \cup B]$ .  
 b) 2.  
 c) 2. Benutze den Satz von Bayes:

$$\begin{aligned} P[A|B] &= \frac{P[B|A]P[A]}{P[B|A]P[A] + P[B|A^c]P[A^c]} \\ &= \frac{0.99 \cdot 0.001}{0.99 \cdot 0.001 + (1 - 0.995) \cdot 0.999} \approx 0.165 \end{aligned}$$

- d) 2.  $\text{Var}(Z) = 49\text{Var}(X) + 4\text{Var}(Y) = 98 + 12 = 110$ .  
 e) 3. Es gilt dass  $X \sim \text{Bin}(1800, 1/6)$ . Daher ergibt sich

$$\text{Var}(X) = 1800 \cdot 1/6 \cdot 5/6 = 250.$$

- f) 2. Aus  $\mathbb{E}[X] = 0$  folgt  $0 = \text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY]$ .  
 g) 1. Für  $X \sim \text{Poi}(\lambda)$  gilt, dass  $\text{Var}(X) = \lambda$ . Daher folgt wegen Unabhängigkeit, dass  $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 2 \frac{9}{2} = 9$ . Somit ist  $\text{sd}(X + Y) = \sqrt{\text{Var}(X + Y)} = 3$ .  
 h) 3. Für die Verteilungsfunktion  $F_Y$  von  $Y$  gilt, dass

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[aX + b \leq y] = P[X \leq \frac{y-b}{a}] = F_X(\frac{y-b}{a}).$$

Somit folgt mit der Kettenregel

$$f_y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(\frac{y-b}{a}) = f_x(\frac{y-b}{a}) \frac{1}{a}.$$

- i) 3.  $\int_0^\infty \exp(-3x) dx = \frac{-\exp(-3x)}{3} \Big|_0^\infty = \frac{1}{3} \neq 1$ .

j) 5.

1. Richtig. Die Dichte ist symmetrisch um  $\mu = 1$ .
2. Richtig. Die Fläche zwischen  $\mu - \sigma$  und  $\mu + \sigma$  beträgt etwa  $2/3$ . Aus Symmetriegründen beträgt die Fläche zwischen  $\mu$  und  $\mu + \sigma$  dann etwa  $1/3$ .
3. Richtig. Dabei handelt es sich um eine standardnormalverteilte Zufallsvariable.
4. Richtig
5. Falsch. Dies gilt allgemein.

**Siehe nächste Seite!**

## 2. (8 Punkte)

Um zu verhindern, dass ein Gerät infolge eines defekten Halbleiters längere Zeit ausfällt, werden zwei identische, parallel geschaltete Halbleiter zu einem Bauteil zusammengefasst. Eine Kontrolllampe leuchtet auf, wenn einer der beiden Halbleiter ausgefallen ist. Wir nehmen an, dass die Lebensdauern der Halbleiter unabhängige, exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 60 Tage sind.

*Hinweis:* Ist  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , so gilt  $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$  und  $\text{Var}(X) = 1/\lambda^2$ .

- a) (2 Punkte) Wie ist die Zeit, nach der die Kontrolllampe aufleuchtet, verteilt?
- b) (3.5 Punkte) Sobald die Kontrolllampe aufleuchtet, wird das ganze Bauteil durch ein neues mit zwei funktionstüchtigen Halbleitern ersetzt. Wie gross ist approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb dreier Jahre mehr als 35 Ersatzbauteile benötigt werden? Wir vereinbaren, dass das erste Bauteil noch nicht als Ersatzbauteil bezeichnet werde.

*Hinweis:* Falls du Teil a) nicht gelöst hast, so kannst du annehmen, dass die Zeit, nach der die Kontrolllampe aufleuchtet, normalverteilt ist mit Erwartungswert  $\mu = 30$  und Varianz  $\sigma^2 = 900$ .

- c) (2.5 Punkte) Oftmals kann ein defektes Bauteil nicht sofort ersetzt werden, sobald die Kontrolllampe aufleuchtet, da ein entsprechendes Ersatzbauteil erst bestellt werden muss. Die Lieferdauer für ein solches Ersatzteil beträgt maximal 3 Tage. Nehmen wir nun an, dass der erste Halbleiter nach  $s$  Tagen defekt wird. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass der 2. Halbleiter nach weiteren  $t$  Tagen noch funktioniert, gegeben, dass er die ersten  $s$  Tage funktionstüchtig geblieben ist. Wie lautet der konkrete Wert für  $t = 3$ ?

### Lösung:

- a) Seien  $H_1, H_2$  die Lebensdauern der entsprechenden Halbleiter. Nach Voraussetzung sind  $H_1, H_2$  i.i.d. und  $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilt mit  $\lambda = 1/60$ . Sei  $T$  die Zeit, nach der die Kontrolllampe aufleuchtet; also ist  $T = \min\{H_1, H_2\}$  (0.5P). Die Verteilungsfunktion von  $T$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P[T \leq t] = P[\min\{H_1, H_2\} \leq t] \\ &= 1 - P[\min\{H_1, H_2\} > t] = 1 - P[H_1 > t, H_2 > t] \quad (0.5P) \\ &= 1 - P[H_1 > t]P[H_2 > t] \quad (0.5P) \\ &= (1 - \exp(-2\lambda t))1_{[0, \infty)}(t). \quad (0.5P) \end{aligned}$$

d.h.  $T$  ist wieder exponentialverteilt mit Parameter  $2\lambda = 1/30$ .

- b) Nach einer Zeit  $T_i, i = 1, 2, \dots$ , wird das  $i$ -te Bauteil ersetzt, wobei ein Bauteil aus zwei Halbleitern besteht. Nach Teil a) sind  $T_1, T_2, \dots$  i.i.d. und

**Siehe nächste Seite!**

Exp( $2\lambda$ )-verteilt. Sei  $A$  das Ereignis, dass innerhalb dreier Jahre (1095 Tage) mehr als 35 Ersatzbauteile benötigt werden. Also ist

$$A = \{S < 1095\}, \quad (1P)$$

wobei  $S := T_1 + \dots + T_{36}$ . Es gilt  $E[S] = 36E[T_1] = 36 \cdot 30 = 1080$  (0.5P) und wegen Unabhängigkeit  $\text{Var}(S) = 39\text{Var}(T_1) = 36 \cdot 30^2 = 32400$  (0.5P). Nach dem zentralen Grenzwertsatz folgt somit

$$\begin{aligned} P[A] &= P[S < 1095] = P\left[\frac{S - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\text{Var}(S)}} < \frac{1095 - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\text{Var}(S)}}\right] \\ &= P\left[\frac{S - 1080}{180} < \frac{15}{180}\right] \quad (0.5P) \\ &\approx \Phi(1/12) \approx \Phi(0.08) \quad (0.5P) = 0.5319. \quad (0.5P) \end{aligned}$$

Wurde (dem Hinweis folgend) angenommen, dass  $T_i \sim \mathcal{N}(30, 900)$   $i = 1, \dots, 36$ , so ergibt sich, dass  $S \sim \mathcal{N}(1080, 32400)$  und durch direkte Rechnung, dass  $P[A] = \Phi(1/12) \approx 0.5319$ .

- c) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit  $P[H_2 > s + t | H_2 > s]$  (1P). Wegen  $H_2 \sim \text{Exp}(\lambda)$  gilt

$$\begin{aligned} P[H_2 > s + t | H_2 > s] &= \frac{P[H_2 > s + t, H_2 > s]}{P[H_2 > s]} = \frac{P[H_2 > s + t]}{P[H_2 > s]} \\ &= \frac{1 - F_{H_2}(s + t)}{1 - F_{H_2}(s)} = \frac{\exp(-\lambda(s + t))}{\exp(-\lambda s)} = \exp(-\lambda t). \quad (1P) \end{aligned}$$

Alternativ folgt dies auch aus der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung,

$$P[H_2 > s + t | H_2 > s] = P[H_2 > t] = 1 - F_{H_2}(t) = \exp(-\lambda t). \quad (1P)$$

Für  $t = 3$  folgt somit  $P[H_2 > s + 3 | H_2 > s] = \exp(-3/60) = \exp(-1/20) (= 0.951)$ . (0.5P)

### 3. (8 Punkte)

Ein Auto läuft im Mittel 1000 Stunden bis zur ersten Störung. Die Einsatzdauer  $T$  (in Stunden) wird von einer Dichtefunktion  $f_T$  beschrieben, wobei

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0 \\ C^2 t \exp(-Ct), & \text{falls } t \geq 0 \end{cases}$$

mit Parameter  $C > 0$ . Familie P. möchte diese Verteilung genauer bestimmen. Für die fünf Autos der Familie wurden die folgenden Zeiten bis zur ersten Störung beobachtet: 580, 1250, 1500, 1050, 1100.

- a) (4 Punkte) Bestimme die Likelihoodfunktion und leite daraus den Maximum-Likelihood-Schätzer für  $C$  her. Wie lautet der realisierte Schätzwert?
- b) (4 Punkte) Bestimme den Momentenschätzer für  $C$ . Wie lautet der realisierte Schätzwert?

*Hinweis:* Verwende, dass

$$\int u^2 \exp(-u) du = -u^2 \exp(-u) - 2u \exp(-u) - 2 \exp(-u).$$

**Lösung:**

- a) Die Likelihoodfunktion lautet

$$L(t_1, \dots, t_5; C) = \prod_{i=1}^5 C^2 t_i \exp(-Ct_i). \quad (1P)$$

Um den Likelihood-Schätzer zu bestimmen, maximieren wir die log-Likelihoodfunktion  $\log L$  bezüglich dem Parameter  $C$ .

$$\log L(t_1, \dots, t_5; C) = \sum_{i=1}^5 (\log(C^2) + \log(t_i) - Ct_i)$$

$$\frac{\partial}{\partial C} \log L(t_1, \dots, t_5; C) = \sum_{i=1}^5 \left( \frac{2}{C} - t_i \right) = \frac{10}{C} - \sum_{i=1}^5 t_i \stackrel{!}{=} 0 \quad (1P)$$

$$\implies \hat{C}^{MLE} = \frac{10}{\sum_{i=1}^5 T_i} \quad (1P)$$

Der realisierte Schätzwert lautet somit  $\hat{C}^{MLE}(\omega) = 10/5480 (\approx 0.00182)$ .  
(1P)

**Siehe nächste Seite!**

- b) Um den Momentenschätzer  $\hat{C}^{MOM}$  zu bestimmen, setzen wir das empirische Mittel gleich dem theoretischen Erwartungswert  $\mathbb{E}[T]$ . Der empirische Mittelwert ist  $\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 T_i$ , mit realisiertem Wert

$$\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 T_i(\omega) = \frac{5480}{5} = 1096.$$

Weiter berechnet sich der Erwartungswert mit Hilfe der Substitution  $u := Ct$ ,  $du = Cdt$  und dem Hinweis als

$$\mathbb{E}[T] = \int_{\mathbb{R}} t f_T(t) dt = \int_0^{\infty} t C^2 t \exp(-Ct) dt = \int_0^{\infty} (Ct)^2 \exp(-Ct) dt \quad (0.5P)$$

$$\stackrel{\text{Sub}}{=} \frac{1}{C} \int_0^{\infty} u^2 \exp(-u) du \quad (0.5P)$$

$$\stackrel{\text{Hinweis}}{=} \frac{1}{C} (-u^2 \exp(-u) - 2u \exp(-u) - 2 \exp(-u)) \Big|_0^{\infty}.$$

Da  $\lim_{u \rightarrow \infty} u^p \exp(-u) = 0$  für jedes  $p > 0$  (0.5P), ergibt sich durch Einsetzen der Grenzen  $\mathbb{E}[T] = \frac{2}{C}$  (0.5P). Somit erhalten wir  $\hat{C}^{MOM}$  durch

$$\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 T_i = \frac{2}{C} \quad (1P) \quad \implies \quad \hat{C}^{MOM} = \frac{10}{\sum_{i=1}^5 T_i} = \hat{C}^{MLE}.$$

Der realisierte Schätzwert ist also wiederum

$$\hat{C}^{MOM}(\omega) = \hat{C}^{MLE}(\omega) = \frac{1}{548} (\approx 0.00182). \quad (1P)$$

#### 4. (10 Punkte)

Die Wahrscheinlichkeit, dass an einem beliebigen Tag in einer Grossstadt erhöhte (d.h. einen kritischen Wert überschreitende) Schadstoffemissionen gemessen werden, sei  $p$ . Zusätzlich nehmen wir an, dass die Emissionshöhen an unterschiedlichen Tagen unabhängig sind.

- a) (1 Punkt) Sei in einem Zeitraum von  $n$  Tagen  $X_n$  die Anzahl derjenigen Tage, an denen erhöhte Emissionswerte gemessen werden. Welche Verteilung hat  $X_n$ ? Wie lauten die Parameter der Verteilung?
- b) (3 Punkte) Innerhalb der letzten 345 Tage wurden an 207 Tagen erhöhte Emissionswerte gemessen. Finde zuerst einen vernünftigen Schätzer  $\hat{p}$  für  $p$  und bestimme unter Verwendung einer Normalapproximation ein 99%-Vertrauensintervall für  $\hat{p}$ . Welche realisierten Ergebnisse findet man für Schätzwert und Vertrauensintervall?

Neue verkehrspolitische Massnahmen werden implementiert, von denen man sich eine Reduktion von  $p$  auf unter 0.4 erhofft. 100 Tage nach Implementierung dieser Massnahmen soll daher versucht werden, statistisch zu belegen, dass  $p$  auf unter 0.4 gefallen ist.

- c) (3.5 Punkte) Formuliere die für die Belegung letzterer Aussage geeigneten Null- und Alternativhypothesen und bestimme mittels Normalapproximation den maximalen approximativen Verwerfungsbereich für das Signifikanzniveau 0.05.
- d) (2.5 Punkte) Während dieses Zeitraums von 100 Tagen nach Implementierung der Massnahmen werden an 28 Tagen erhöhte Emissionen gemessen. Erkläre kurz das Resultat des Tests aus Aufgabenteil c) und bestimme mittels Normalapproximation den realisierten  $p$ -Wert.

#### Lösung:

- a)  $X_n$  ist binomialverteilt mit Parametern  $n$  und  $p$ . (1P)
- b) Ein Schätzer für  $p$  ist  $\hat{p} = \frac{1}{n}X_n$ . (0.5P) Der entsprechende Schätzwert ist

$$\hat{p}(\omega) = \frac{207}{345} = \frac{69}{115} = \frac{3 \cdot 23}{5 \cdot 23} = 0.6. \quad (0.5P)$$

Laut Normalapproximation ist  $X_n \stackrel{appr.}{\sim} \mathcal{N}(np, np(1-p))$ , also

$$\hat{p} \stackrel{appr.}{\sim} \mathcal{N}\left(p, \frac{1}{n}p(1-p)\right) \quad (0.5P)$$

und damit ein approximatives Vertrauensintervall gegeben durch

$$\hat{p} \pm \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\hat{p}\left(1 - \hat{p}\right) \frac{1}{n}}, \quad (0.5P)$$

Siehe nächste Seite!

wobei  $\alpha = 0.01$ . Weiter ergibt sich das realisierte Intervall mit  $\hat{p}(\omega) = \frac{1}{n}X_n(\omega)$ ,  $X_n(\omega) = 207$  und  $n = 345$  durch

$$0.6 \pm \Phi^{-1}(0.995) \sqrt{0.6 \times 0.4 \times \frac{1}{345}}.$$

Mit dem Wert  $\Phi^{-1}(0.995) = 2.575$  erhält man mit Hilfe der Approximationen

$$\begin{aligned} 0.6 \pm 2.575 \sqrt{0.6 \times 0.4 \times \frac{1}{345}} & \quad (0.5P) = 0.6 \pm 2.575 \sqrt{\frac{24}{100 \cdot 345}} \\ & = 0.6 \pm 2.575 \sqrt{\frac{2}{25 \cdot 207}} \\ & = 0.6 \pm 2.575 \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{207}} \\ & \approx 0.6 \pm 2.575 \frac{1}{5} \sqrt{\frac{1}{100}} \\ & = 0.6 \pm 2.575 \cdot 0.02 = 0.6 \pm 0.0515 \\ & = [0.5485, 0.6515] \quad (0.5P) \end{aligned}$$

als realisiertes approximatives 99%-Vertrauensintervall für  $p$ .

c) Zur Belegung der Aussage wählt man als Nullhypothese

$$H_0 : p = 0.4 \quad (0.5P)$$

und als Alternativhypothese die zu belegende Aussage, also

$$H_A : p < 0.4. \quad (0.5P)$$

Der Verwerfungsbereich ist  $\{x : x \leq c\}$ , wobei  $c \in \mathbb{N}_0$  so gross wie möglich mit  $P_{0.4}[X_{100} \leq c] \leq 0.05$  ist. (0.5P) Zur Berechnung von  $P_{0.4}[X_{100} \leq c]$  verwendet man die Normalapproximation. Unter Berücksichtigung der Kontinuitätskorrektur ergibt sich

$$\begin{aligned} P_{0.4}[X_{100} \leq c] & = P_{0.4} \left[ \frac{X_{100} - 40}{\sqrt{0.4 \times 0.6 \times 100}} \leq \frac{c - 40}{\sqrt{0.4 \times 0.6 \times 100}} \right] \\ & \approx \Phi \left( \frac{c - 40 + 0.5}{\sqrt{0.4 \times 0.6 \times 100}} \right). \end{aligned}$$

Somit benötigen wir

$$\Phi \left( \frac{c - 39.5}{\sqrt{0.4 \times 0.6 \times 100}} \right) \leq 0.05,$$

beziehungsweise

$$1 - \Phi \left( \frac{c - 39.5}{\sqrt{0.4 \times 0.6 \times 100}} \right) = \Phi \left( \frac{39.5 - c}{\sqrt{0.4 \times 0.6 \times 100}} \right) \geq 0.95, \quad (1P)$$

**Siehe nächste Seite!**

oder

$$\begin{aligned} c \leq 39.5 - \Phi^{-1}(0.95)\sqrt{0.4 \times 0.6 \times 100} &\stackrel{\Phi^{-1}(0.95) \approx 1.645}{\approx} 39.5 - 1.645\sqrt{24} & (0.5P) \\ &\approx 39.5 - 1.6 \cdot 5 = 31.5. & (0.5P) \end{aligned}$$

Somit ist der maximale approximative Verwerfungsbereich  $\{x : x \leq 31\}$ .

- d)** Aus der Beobachtung folgt, dass die Aussage bzw. die gewählte Alternativhypothese signifikant ist. **(1P)** Der  $p$ -Wert ist gegeben durch  $P_{0.4}[X_{100} \leq 28]$ . **(0.5P)** Durch Normalapproximation (mit Kontinuitätskorrektur) erhält man

$$\begin{aligned} P_{0.4}[X_{100} \leq 28] &= P_{0.4}\left[\frac{X_{100} - 40}{\sqrt{0.4 \times 0.6 \times 100}} \leq \frac{-12}{\sqrt{0.4 \times 0.6 \times 100}}\right] \\ &\approx \Phi\left(\frac{-11.5}{\sqrt{0.6 \times 0.4 \times 100}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{11.5}{\sqrt{0.6 \times 0.4 \times 100}}\right). & (0.5P) \end{aligned}$$

Mit  $\frac{11.5}{\sqrt{0.6 \times 0.4 \times 100}} \approx \frac{11.5}{\sqrt{25}} = 2.39$  und  $\Phi(2.39) \approx 0.9916$  erhält man also etwa den realisierten  $p$ -Wert 0.0084. **(0.5P)**