Wahrscheinlichkeit und Statistik
D-INFK

Name:	
Vorname:	
Stud. Nr.:	

Tabelle unten bitte nicht ausfüllen!

Aufg.	Summe	Kontr.	Pkte.-Max.
1			10
2			8
3			8
4			10

Punktetotal:	
Vollständigkeit:	

Siehe nächste Seite!

Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 2 Stunden.

Hilfsmittel: 10 A4-Seiten resp. 5 Blätter Zusammenfassung. Kein Taschenrechner!

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Tragen Sie Ihre Daten in dieses Deckblatt ein und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, rotem oder grünem Kugelschreiber.
- Um die volle Punktzahl zu erreichen, begründen Sie alle Resultate durch Zwischenschritte und -rechnungen (ausser Aufgabe 1) und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.
- Lesen Sie alle Aufgaben durch, bevor Sie beginnen. Für eine genügende Note wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben in der Ihnen zur Verfügung stehenden Zeit lösen können.
- Es dürfen sich nur erlaubte Hilfsmittel auf dem Tisch befinden, d.h. 10 A4-Seiten resp. 5 Blätter Zusammenfassung. Kein Taschenrechner!
- Die Zahlenwerte in allen Aufgaben sind so gewählt, dass man mit etwas Runden die benötigten numerischen Werte im Kopf oder mit einer einfachen Papierrechnung bekommen kann.

Siehe nächste Seite!

Antwortblatt zur Aufgabe 1

Bitte benützen Sie dieses Blatt, um die Aufgabe 1 zu lösen, indem Sie an der entsprechenden Stelle ein **Kreuz ✗** machen. Wird in einer Zeile kein Kreuz gemacht, so wird dies als "keine Antwort" gewertet. Falls es in einer Zeile kein oder mehr als ein Kreuz hat, wird dies ebenfalls als "keine Antwort" gewertet.

	1.	2.	3.	4.	5.
a)					
b)					
c)					
d)					
e)					
f)					
g)					
h)					
i)					
j)					

Bitte nicht ausfüllen!

Richtig	Falsch	Keine Antwort

Bitte nicht ausfüllen!

	1. Korr.	2. Korr.
richtig		
falsch		
keine Antwort		
Punkte		

Siehe nächste Seite!

Aufgaben

---

1. (10 Punkte)

Bei den folgenden 10 Fragen gibt es pro richtig beantwortete Frage 1 Punkt. Pro falsche Antwort gibt es 1/2 Punkt Abzug. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte.

a) Seien A und B zwei Ereignisse. Die Aussage $P[A^c \cap B^c] = 1 - P[A \cap B]$ ist

1. wahr.
2. nicht wahr.

b) Seien A und B zwei Ereignisse. Das Additionsgesetz, d.h. die Formel

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B]$$

gilt, falls

1. A und B unabhängig sind.
2. A und B disjunkt sind.
3. A eine Teilmenge von B ist.

c) Wir betrachten einen Labortest für eine Krankheit. Sei A das Ereignis, dass eine getestete Person die Krankheit hat. Sei B das Ereignis, dass der Test positiv ist. Man weiss $P[B|A] = 0.99$ und $P[B^c|A^c] = 0.995$. Der Anteil der Bevölkerung, der die Krankheit hat, ist 0.1%. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Person mit einem positiven Test tatsächlich die Krankheit hat?

1. $P[A|B] \approx 0.065$.
2. $P[A|B] \approx 0.165$.
3. $P[A|B] \approx 0.560$.

d) Seien X und Y unkorrelierte Zufallsvariablen mit Varianzen $\mathrm{Var}(X) = 2$ und $\mathrm{Var}(Y) = 3$. Wie gross ist die Varianz von $Z = 7X - 2Y$?

1. 86
2. 110
3. 8

Siehe nächste Seite!

e) Ein fairer Würfel wird 1800mal geworfen. Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Würfe mit Augenzahl 6. Wie gross ist die Varianz von X?

1. 1800
2. 300
3. 250

f) Seien $X \sim N(0,1)$ und $Y \sim \text{Unif}[0,1]$ Zufallsvariablen mit $\text{Cov}(X,Y) = 0$. Welche Aussage ist korrekt?

1. X und Y sind unabhängig.
2. $\mathbb{E}[XY] = 0$.
3. Keine der anderen beiden Aussagen trifft zu.

g) Seien X und Y unabhängig und identisch $\text{Poi}(\frac{9}{2})$ verteilt. Wie gross ist die Standardabweichung der Zufallsvariablen $X + Y$?

1. 3
2. $\frac{9}{2}$
3. $\sqrt{\frac{9}{2}}$

h) Die Zufallsvariable X habe eine Verteilungsfunktion F_X mit zugehöriger Dichte f_X. Sei $Y = aX + b$, mit $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die Dichte f_Y von Y

1. $f_Y(y) = af_X(y) + b$
2. $f_Y(y) = f_X(\frac{y-b}{a})$
3. $f_Y(y) = \frac{1}{a} f_X(\frac{y-b}{a})$

i) Welche der folgenden Funktionen ist **keine** Wahrscheinlichkeitsdichte? (Ausserhalb der angegebenen Intervalle ist immer $f(x) = 0$.)

1. $f(x) = 0.5$ auf dem Intervall $[-1.5, 0.5]$.
2. $f(x) = 1 - x/2$ auf dem Intervall $[0, 2]$.
3. $f(x) = \exp(-3x)$ auf $[0, \infty)$.
4. Alle könnten Wahrscheinlichkeitsdichten sein.

j) Wir betrachten die normalverteilte Zufallsvariable $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu = 1$ und $\sigma^2 = 2$. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

1. $P[X \leq 0] > P[X \geq 3]$.
2. Die Fläche unter der Dichtefunktion im Intervall $[1, 1 + \sqrt{2}]$ ist ca. 1/3.
3. Wenn wir X standardisieren, haben wir eine Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung 1.
4. Für jeden Wert von $\sigma^2 > 0$ ist die Dichte symmetrisch um 1, solange wir $\mu = 1$ fest lassen.
5. Nur bei der Normalverteilung stimmt die Standardabweichung immer mit der Wurzel der Varianz überein.

2. (8 Punkte)

Um zu verhindern, dass ein Gerät infolge eines defekten Halbleiters längere Zeit ausfällt, werden zwei identische, parallel geschaltete Halbleiter zu einem Bauteil zusammengefasst. Eine Kontrolllampe leuchtet auf, wenn einer der beiden Halbleiter ausgefallen ist. Wir nehmen an, dass die Lebensdauern der Halbleiter unabhängige, exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 60 Tage sind.

Hinweis: *Ist $X \sim Exp(\lambda)$, so gilt $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$ und $Var(X) = 1/\lambda^2$.*

a) **(2 Punkte)** Wie ist die Zeit, nach der die Kontrolllampe aufleuchtet, verteilt?

b) **(3.5 Punkte)** Sobald die Kontrolllampe aufleuchtet, wird das ganze Bauteil durch ein neues mit zwei funktionstüchtigen Halbleitern ersetzt. Wie gross ist approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb dreier Jahre mehr als 35 Ersatzbauteile benötigt werden? Wir vereinbaren, dass das erste Bauteil noch nicht als Ersatzbauteil bezeichnet werde.

Hinweis: *Falls du Teil a) nicht gelöst hast, so kannst du annehmen, dass die Zeit, nach der die Kontrolllampe aufleuchtet, normalverteilt ist mit Erwartungswert $\mu = 30$ und Varianz $\sigma^2 = 900$.*

c) **(2.5 Punkte)** Oftmals kann ein defektes Bauteil nicht sofort ersetzt werden, sobald die Kontrolllampe aufleuchtet, da ein entsprechendes Ersatzbauteil erst bestellt werden muss. Die Lieferdauer für ein solches Ersatzteil beträgt maximal 3 Tage. Nehmen wir nun an, dass der erste Halbleiter nach s Tagen defekt wird. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass der 2. Halbleiter nach weiteren t Tagen noch funktioniert, gegeben, dass er die ersten s Tage funktionstüchtig geblieben ist. Wie lautet der konkrete Wert für $t = 3$?

Siehe nächste Seite!

3. (8 Punkte)

Ein Auto läuft im Mittel 1000 Stunden bis zur ersten Störung. Die Einsatzdauer T (in Stunden) wird von einer Dichtefunktion f_T beschrieben, wobei

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0 \\ C^2 t \exp(-Ct), & \text{falls } t \geq 0 \end{cases}$$

mit Parameter $C > 0$. Familie P. möchte diese Verteilung genauer bestimmen. Für die fünf Autos der Familie wurden die folgenden Zeiten bis zur ersten Störung bobachtet: 580, 1250, 1500, 1050, 1100.

a) **(4 Punkte)** Bestimme die Likelihoodfunktion und leite daraus den Maximum-Likelihood-Schätzer für C her. Wie lautet der realisierte Schätzwert?

b) **(4 Punkte)** Bestimme den Momentenschätzer für C. Wie lautet der realisierte Schätzwert?

Hinweis: *Verwende, dass*

$$\int u^2 \exp(-u)\, du = -u^2 \exp(-u) - 2u \exp(-u) - 2 \exp(-u).$$

Siehe nächste Seite!

4. **(10 Punkte)**

Die Wahrscheinlichkeit, dass an einem beliebigen Tag in einer Grossstadt erhöhte (d.h. einen kritischen Wert überschreitende) Schadstoffemissionen gemessen werden, sei p. Zusätzlich nehmen wir an, dass die Emissionshöhen an unterschiedlichen Tagen unabhängig sind.

a) **(1 Punkt)** Sei in einem Zeitraum von n Tagen X_n die Anzahl derjenigen Tage, an denen erhöhte Emissionswerte gemessen werden. Welche Verteilung hat X_n? Wie lauten die Parameter der Verteilung?

b) **(3 Punkte)** Innerhalb der letzten 345 Tage wurden an 207 Tagen erhöhte Emissionswerte gemessen. Finde zuerst einen vernünftigen Schätzer $\hat{p}$ für p und bestimme unter Verwendung einer Normalapproximation ein 99%-Vertrauensintervall für $\hat{p}$. Welche realisierten Ergebnisse findet man für Schätzwert und Vertrauensintervall?

Neue verkehrspolitische Massnahmen werden implementiert, von denen man sich eine Reduktion von p auf unter 0.4 erhofft. 100 Tage nach Implementierung dieser Massnahmen soll daher versucht werden, statistisch zu belegen, dass p auf unter 0.4 gefallen ist.

c) **(3.5 Punkte)** Formuliere die für die Belegung letzterer Aussage geeigneten Null- und Alternativhypothesen und bestimme mittels Normalapproximation den maximalen approximativen Verwerfungsbereich für das Signifikanzniveau 0.05.

d) **(2.5 Punkte)** Während dieses Zeitraums von 100 Tagen nach Implementierung der Massnahmen werden an 28 Tagen erhöhte Emissionen gemessen. Erkläre kurz das Resultat des Tests aus Aufgabenteil c) und bestimme mittels Normalapproximation den realisierten p-Wert.

Viel Erfolg!

Siehe nächste Seite!

Tabelle der Standardnormalverteilung

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Zum Beispiel ist $P[Z \leq 1.96] = 0.975$.

Tabelle der t-Verteilung

$df \backslash \alpha$	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
90	0.254	0.526	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Zum Beispiel ist $P[T_9 \leq 2.262] = 0.975$.