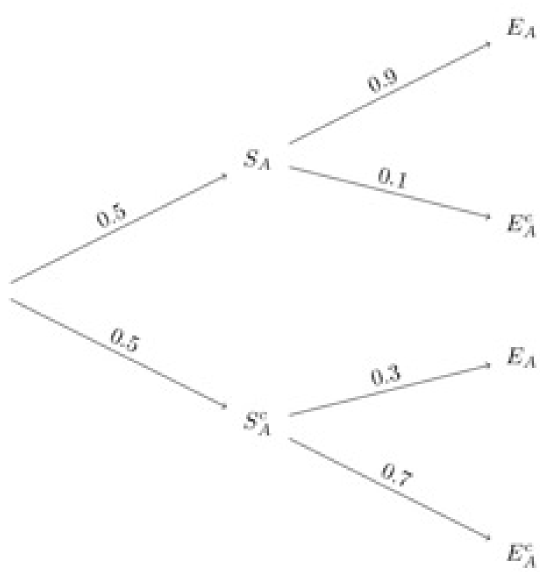
Wahrscheinlichkeit und Statistik
BSc D-INFK

1. **a)** (iii) **b)** (i) **c)** (iii) **d)** (ii) **e)** (i) **f)** (ii) **g)** (ii) **h)** (iii) **i)** (ii) **j)** (i)

2. Das Ereignis, dass eine Quelle des Systems A ein 0- bzw. 1-Bit sendet, bezeichnen wir mit S_A bzw. S_A^c. Ein gesendetes 0- bzw. 1-Bit wird entweder korrekt oder falsch übertragen. E_A bezeichne das Ereignis, ein 0-Bit korrekt zu empfangen, während E_A^c das Ereignis bezeichne, ein 1-Bit korrekt zu empfangen. Der Index A steht für das System A und der Index B für das System B. Weil nach Annahme die 0- und 1-Bits in den gesendeten Nachrichten gleich häufig auftreten, gilt $P[S_A] = P[S_B] = P[S_A^c] = P[S_B^c] = 0.5$.

Für das System A erhalten wir dann das untenstehende Baumdiagramm. Das Baumdiagramm für das Übertragungssystem B erhält man analog.



Bitte wenden!

a) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, den Wert 1 durch das digitale Übertragungssystem B zu empfangen. Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit folgt

$$\begin{aligned} P[E_B^c] = P[E_B^c|S_B^c]P[S_B^c] + P[E_B^c|S_B]P[S_B] &= 0.2 \cdot 0.5 + 0.9 \cdot 0.5 \\ &= 0.55 = \frac{55}{100}. \end{aligned}$$

b) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $(S_B \cap E_B^c) \cup (S_B^c \cap E_B)$. Diese sind disjunkt und somit folgt

$$\begin{aligned} P[(S_B \cap E_B^c) \cup (S_B^c \cap E_B)] &= P[S_B \cap E_B^c] + P[S_B^c \cap E_B] \\ &= P[E_B^c|S_B]P[S_B] + P[E_B|S_B^c]P[S_B^c] \\ &= 0.2 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.5 = 0.15 = \frac{3}{20}. \end{aligned}$$

c) Die erwarteten Kosten für das Übertragungssystem A sind

$$1 \cdot P[S_A \cap E_A^c] + 0.4 \cdot P[S_A^c \cap E_A] = 1(0.1 \cdot 0.5) + 0.4(0.3 \cdot 0.5) = 0.11 = \frac{11}{100}.$$

Die erwarteten Kosten für das Übertragungssystem B berechnet man analog

$$1 \cdot P[S_B \cap E_B^c] + 0.4 \cdot P[S_B^c \cap E_B] = 1(0.2 \cdot 0.5) + 0.4(0.1 \cdot 0.5) = 0.12 = \frac{12}{100}.$$

Die erwarteten Kosten des Übertragungssystems A fallen etwas kleiner aus.

d) Gesucht sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P[S_A|E_A]$ und $P[S_A^c|E_A^c]$. Die lassen sich mit dem Satz von Bayes berechnen.

$$\begin{aligned} P[S_A|E_A] = \frac{P[E_A|S_A]P[S_A]}{P[E_A]} &= \frac{P[E_A|S_A]P[S_A]}{P[E_A|S_A]P[S_A] + P[E_A|S_A^c]P[S_A^c]} \\ &= \frac{0.9 \cdot 0.5}{0.9 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.5} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P[S_A^c|E_A^c] = \frac{P[E_A^c|S_A^c]P[S_A^c]}{P[E_A^c]} &= \frac{P[E_A^c|S_A^c]P[S_A^c]}{P[E_A^c|S_A]P[S_A] + P[E_A^c|S_A^c]P[S_A^c]} \\ &= \frac{0.7 \cdot 0.5}{0.7 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.5} = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

e) Den korrekten Empfang der Nachricht 0110111 bezeichnen wir mit N. Da die Nachricht 0110111 aus dem unabhängigem Empfangen von zweimal dem Wert 0 und fünfmal dem Wert 1 entsteht, folgt mit der Teilaufgabe **d)**

$$P[N] = p = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{7}{8}\right)^5.$$

Siehe nächstes Blatt!

Falls die fiktiven Wahrscheinlichkeiten für die korrekte Übertragung eines Bits $\frac{3}{5}$ für ein 0-Bit und $\frac{7}{11}$ für ein 1-Bit gebraucht wurden, so lautet die Lösung

$$P[N] = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{7}{11}\right)^5.$$

f) Ist X_i das Ereignis, dass beim i-ten Senden der Nachricht 0110111 diese korrekt empfangen wird, so ist $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim Bin(n = 50, p = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{7}{8}\right)^5)$. Also folgt für $n = 50$

$$\begin{aligned} P[S_{50} > 8] &= 1 - P[S_{50} \leq 8] \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{8} \binom{50}{k} \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{7}{8}\right)^5\right)^k \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{7}{8}\right)^5\right)^{50-k}. \end{aligned}$$

3. **a)** Es muss gelten: $1 \stackrel{!}{=} k \int_2^3 (3-x)dx = k(3x - \frac{1}{2}x^2)\Big|_2^3 = k(9 - \frac{9}{2} - 6 + 2) = \frac{k}{2}$; daraus folgt, dass $k = 2$. Mit $k = 2$ gilt auch $f_M(x) \geq 0$, also ist f_M eine Dichte.

b) Wir müssen den Erwartungswert $E[C]$ ausrechnen. Dafür benötigen wir zuerst die Dichte f_C. Wir leiten $F_M(x)$ nach x ab und erhalten also
$f_C(x) = \frac{1}{2}(x-1)1_{[1,3]}(x)$.

$$\begin{aligned} E[C] = \int_1^3 \frac{1}{2}x(x-1)dx &= \frac{1}{2}\int_1^3 (x^2 - x)dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\Big|_1^3\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(9 - \frac{9}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

c) Die Verteilungsfunktion $F_R(x)$ von R ist

$$F_R(x) = P[R \leq x] = P[C^2 \leq x] = P[C \leq \sqrt{x}] = F_C(\sqrt{x}) = \frac{1}{4}(\sqrt{x} - 1)^2 1_{[1,3]}(x).$$

$F_R(x)$ abgeleitet nach x ergibt die Dichte $f_R(x)$ von R als

$$f_R(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) & \text{falls } 1 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bitte wenden!

d) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{M > \frac{5}{2}\}$.

$$\begin{aligned} P\Big[M > \frac{5}{2}\Big] = 1 - P\Big[M \leq \frac{5}{2}\Big] &= 1 - k \int_2^{\frac{5}{2}} (3-x)dx \\ &= 1 - k\Big[3x - \frac{1}{2}x^2\Big|_2^{\frac{5}{2}}\Big] \\ &= 1 - k\frac{3}{8} \overset{(k=2)}{=} \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

e) Da die Zufallsvariablen M und C unabhängig sind, gilt

$$\begin{aligned} P\Big[M > \frac{5}{2}, C > \frac{5}{2}\Big] = P\Big[M > \frac{5}{2}\Big] \cdot P\Big[C > \frac{5}{2}\Big] &= \frac{1}{4}\Big(1 - F_C\Big(\frac{5}{2}\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{4}\Big(\frac{5}{2} - 1\Big)^2\Big) = \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{9}{16}\Big) = \frac{7}{64}. \end{aligned}$$

f) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\{C < M\}$, also benötigen wir die gemeinsame Dichte $f_{M,C}(m,c)$. Da die Zufallsvariablen M und C unabhängig sind, gilt $f_{M,C}(m,c) = f_M(m)f_C(c)$. Braucht Christian höchstens 2 Stunden für das Austragen, so gewinnt er in jedem Fall, und das passiert mit Wahrscheinlichkeit $P[C \leq 2]$. Braucht er mehr als 2 Stunden, so wird die Wahrscheinlichkeit $P[2 < C < M]$ benötigt. Also gilt

$$\begin{aligned} P[C < M] &= P[C \leq 2] + P[2 < C < M] \\ &= F_C(2) + P[2 < C < M] \\ &= \frac{1}{4} + P[2 < C < M]. \end{aligned}$$

Für $P[2 < C < M]$ erhalten wir

$$\begin{aligned} P[2 < C < M] = \int_2^3 \int_2^m (3-m)(c-1)dc\,dm &= \int_2^3 (3-m)\Big(\frac{1}{2}c^2 - c\Big)\Big|_2^m dm \\ &= \int_2^3 (3-m)\Big(\frac{1}{2}m^2 - m\Big)dm \\ &= \int_2^3 \Big(\frac{5}{2}m^2 - \frac{1}{2}m^3 - 3m\Big)dm \\ &= \frac{5}{6}m^3 - \frac{1}{8}m^4 - \frac{3}{2}m^2\Big|_2^3 \\ &= -\frac{9}{8} + \frac{4}{3} = \frac{5}{24}. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

2. Lösungsweg für die Berechnung des Integrals:

$$
\begin{aligned}
P[2 < C < M] = \int_2^3 \int_c^3 (3-m)(c-1)dm\, dc &= \int_2^3 (c-1)\Big(3m - \frac{1}{2}m^2\Big)\Big|_c^3 dc \\
&= \int_2^3 (c-1)\Big(\frac{1}{2}c^2 - 3c + \frac{9}{2}\Big)dc \\
&= \int_2^3 \Big(\frac{1}{2}c^3 - \frac{7}{2}c^2 + \frac{15}{2}c - \frac{9}{2}\Big)dc \\
&= \frac{1}{8}c^4 - \frac{7}{6}c^3 + \frac{15}{4}c^2 - \frac{9}{2}c\Big|_2^3 \\
&= -\frac{9}{8} + \frac{4}{3} = \frac{5}{24}.
\end{aligned}
$$

Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P[C < M] = \frac{1}{4} + \frac{5}{24} = \frac{11}{24}$.

g) i) 500 Schüler (ohne Christian) haben am Wettbewerb teilgenommen. Von diesen 500 Schülern sind 400 besser als Christian und 100 schlechter. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein aus der Gruppe zufällig ausgewählter Schüler schlechter als Christian platziert ist, $p = \frac{100}{500} = \frac{1}{5}$.

ii) Sei Y die Anzahl der Schüler in der Gruppe, die schlechter platziert sind als Christian. Y hat hypergeometrische Verteilung mit Parametern $n = 500, r = 100$ und $m = 25$. Somit gilt

$$
P[Y = 5] = \frac{\binom{100}{5}\binom{400}{20}}{\binom{500}{25}}.
$$

iii) Sei $Y_i = 1_{\{\text{Person } i \text{ schlechter als Christian}\}} \sim Be(\frac{1}{5})$, dann ist $X := \sum_{i=1}^{100} Y_i \sim Bin(100, \frac{1}{5})$. Für den Erwartungswert und die Varianz von X erhalten wir $E[X] = 20$ und $\text{Var}[X] = 16$. Mit der Normalapproximation für die Binomialverteilung und der Kontinuitätskorrektur $\frac{1}{2}$ folgt

$$
\begin{aligned}
P[X \geq 28] = 1 - P[X < 28] = 1 - P\Big[\frac{X - E[X]}{\sqrt{\text{Var}[X]}} < \frac{28 - E[X]}{\sqrt{\text{Var}[X]}}\Big] \\
\approx 1 - \Phi\Big(\frac{28 - 20 + \frac{1}{2}}{4}\Big) \\
= 1 - \Phi(2.125) = 1 - 0.983 = 0.017.
\end{aligned}
$$

Wurde die fiktive Wahrscheinlichkeit benützt, so ist $E[X] = 25$ und $\text{Var}[X] =$

Bitte wenden!

18.75. Die Lösung lautet

$$\begin{aligned} P[X \geq 28] = 1 - P[X < 28] &= 1 - P\Big[\frac{X - E[X]}{\sqrt{\text{Var}[X]}} < \frac{28 - E[X]}{\sqrt{\text{Var}[X]}}\Big] \\ &= 1 - \Phi\Big(\frac{28 - 25 + \frac{1}{2}}{4}\Big) \\ &= 1 - \Phi(0.875) = 1 - 0.808 = 0.192. \end{aligned}$$

4. **a)** Die Binomialverteilung eignet sich als Modell. Genauer gesagt nehmen wir an, dass die Anzahl der falsch eingeordneten Bücher X binomialverteilt ist mit $n = 100$.

i) Somit ist X die plausible Teststatistik. Die Nullhypothese lautet H_0: $X \sim Bin(100, p_0)$ mit $p_0 = 0.03$ und die Alternativhypothese H_A: $X \sim Bin(100, p)$ mit $p < 0.03$.

ii) Mit Hilfe des Hinweises erhalten wir $P_{p_0}[X = 0] = 0.0475 < 0.05$ und $P_{p_0}[X \leq 1] = 0.1882 > 0.05$. Also ist der Verwerfungsbereich $K = \{k = 0\}$.

iii) Testentscheidung: Die Nullhypothese wird beibehalten, da ein falsch eingeordnetes Buch gefunden wurde. Die Bestandsaufnahme wird nicht verschoben.

b) Die Bestandaufnahme wird unnötigerweise verfrüht durchgeführt, falls die Nullhypothese angenommen wird, obwohl H_A: $X \sim Bin(100, 0.01)$ richtig ist. Wir berechnen deshalb die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art als

$$P_{p=0.01}[X > 0] = 1 - P_{p=0.01}[X = 0] = 0.634,$$

d.h. die Bestandsaufnahme wird zu 63.4% unnötig durchgeführt. Die Macht ist die Wahrscheinlichkeit, H_0 zu verwerfen unter der Annahme, dass H_A korrekt ist, und beträgt $1 - 0.634 = 0.3660$.

c) i) Die Teststatistik ist entweder X oder $\overline{X} = \frac{X}{n}$. Die Nullhypothese lautet $H_0 : p_0 = 0.03$ und die Alternativhypothese $H_A : p < 0.03$.

ii) Aus dem zentralen Grenzwertsatz folgt, dass

$$T' = \frac{\overline{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}$$

approximativ standardnormalverteilt. Die Nullhypothese wird verworfen, wenn $T'(\omega) < -z_{1-\alpha} = -1.645$, wobei $z_{1-\alpha}$ das $(1 - \alpha)$-Quantil der $\mathcal{N}(0.1)$-Verteilung ist.

Siehe nächstes Blatt!

iii) In unserem Fall ist $n = 1000$ und $\overline{X}(\omega) = \overline{x} = \frac{10}{1000} = 0.01$, also gilt $T'(\omega) = \frac{0.01-0.03}{\sqrt{0.03 \cdot 0.97/1000}} = -3.71$ (bzw. mit dem Hinweis $\sqrt{\frac{0.03 \cdot 0.97}{1000}} \approx 0.005$ ist $T'(\omega) \approx -4$). Da $-3.71 < -1.645$ (bzw. $-4 < -1.645$), wird die Nullhypothese verworfen und die Bestandsaufnahme kann verschoben werden.