

## Wahrscheinlichkeit und Statistik BSc D-INFK

<b>Name:</b>	
<b>Vorname:</b>	
<b>Stud. Nr.:</b>	

---

Das Folgende bitte nicht ausfüllen!

Aufg.	Summe	Kontr.	Pkte.-Max.
1			10
2			10
3			15
4			10

<b>Punktetotal:</b>	
<b>Vollständigkeit:</b>	

**Bitte wenden!**

# Hinweise zur Prüfung

---

**Prüfungsdauer:** 2 Stunden.

**Hilfsmittel:** 10 A4-Seiten resp. 5 Blätter Zusammenfassung. Kein Taschenrechner!

**Bitte beachten Sie folgende Punkte:**

- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Tragen Sie Ihre Daten in dieses Deckblatt ein und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, rotem oder grünem Kugelschreiber.
- Um die volle Punktzahl zu erreichen, begründen Sie bitte alle Resultate durch Zwischenschritte und -rechnungen (ausser Aufgabe 1) und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.
- Lesen Sie alle Aufgaben durch, bevor Sie beginnen. Für eine genügende Note wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben in der Ihnen zur Verfügung stehenden Zeit lösen können.
- Es dürfen sich nur erlaubte Hilfsmittel auf dem Tisch befinden, d.h. 10 A4-Seiten resp. 5 Blätter Zusammenfassung. Kein Taschenrechner!

**Siehe nächstes Blatt!**

# Aufgaben

---

## 1. (10 Punkte)

Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig. Es gibt pro richtig beantwortete Frage 1 Punkt und pro falsche Antwort  $1/2$  Punkt Abzug. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte. **Bitte benützen Sie das beiliegende Antwortblatt.**

- a) In einer Urne liegen ein roter, ein blauer und ein schwarzer Würfel. Der rote Würfel ist ein fairer Würfel, während die Wahrscheinlichkeiten für die anderen durch die folgende Tabelle gegeben sind:

	$k$	1	2	3	4	5	6
Blau	$p_k$	$1/5$	$7/60$	$7/60$	$7/60$	$7/60$	$1/3$
Schwarz	$p_k$	$1/4$	$5/32$	$5/32$	$5/32$	$5/32$	$1/8$

Wir ziehen blind und gleichzeitig zwei Würfel aus der Urne und werfen sie. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, 2 als Augensumme zu kriegen?

- (i)  $\frac{2}{9}$ ,
- (ii)  $\frac{1}{18}$ ,
- (iii)  $\frac{1}{24}$ .

- b) Aus derselben Urne wie in Teilaufgabe a) ziehen wir jetzt nur einen Würfel, werfen ihn und bekommen eine 6. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der gezogene Würfel blau war?

- (i)  $\frac{8}{15}$ ,
- (ii)  $\frac{3}{5}$ ,
- (iii)  $\frac{17}{30}$ .

- c) Seien  $A$  und  $B$  beliebige Ereignisse mit  $P[A] = 0.5$  und  $P[B] = 0.8$ . Dann gilt:

- (i)  $P[A \cap B] = 0.4$ ,
- (ii)  $P[A \cap B] \leq 0.4$ ,
- (iii)  $P[A \cap B] \geq 0.3$ .

**Bitte wenden!**

**d)** Seien  $X$  und  $Y$  Zufallsvariablen mit  $E[X] = 1$ ,  $E[Y] = 2$ ,  $\text{Var}[X] = \text{Var}[Y] = 5$  und  $\text{Cov}(X, Y) = -4$ . Wie gross ist  $E[(2X + 3Y)^2]$ ?

- (i)  $E[(2X + 3Y)^2] = 57$ ,
- (ii)  $E[(2X + 3Y)^2] = 81$ ,
- (iii)  $E[(2X + 3Y)^2] = 32$ .

**e)** Die Anzahl von Kunden, die aus einem Bankomat in einer Stunde Geld abheben, sei Poisson-verteilt mit Parameter 5. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb von 2 Stunden weniger als 2 Kunden Geld abheben?

- (i)  $11e^{-10}$ ,
- (ii)  $(6e^{-5})^2$ ,
- (iii)  $12e^{-5}$ .

**f)** Sei  $X$  exponentialverteilt mit Parameter 2 und  $U$  eine von  $X$  unabhängige Zufallsvariable mit  $P[U = \frac{1}{2}] = \frac{2}{3}$ ,  $P[U = 1] = \frac{1}{3}$ . Was ist  $P[XU > 1]$ ?

- (i)  $1 - \frac{1}{3}e^{-2} - \frac{2}{3}e^{-4}$ ,
- (ii)  $\frac{1}{3}e^{-2} + \frac{2}{3}e^{-4}$ ,
- (iii)  $\frac{1}{3}e^{-2} + \frac{2}{3}e^{-1}$ .

**g)** Seien  $X$  und  $Y$  Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{10}(x + y)^2 e^{-x}, & \text{falls } x \geq 0, y \in (0, 1), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist die Randdichte  $f_X$  von  $X$  gegeben durch

- (i)  $f_X(x) = \frac{3}{10}(x^2 + x + 1)e^{-x} 1_{\{x \geq 0\}}$ ,
- (ii)  $f_X(x) = \frac{1}{10}(3x^2 + 3x + 1)e^{-x} 1_{\{x \geq 0\}}$ ,
- (iii)  $f_X(x) = \frac{1}{10}(x + 1)^2 e^{-x} 1_{\{x \geq 0\}}$ .

**h)** Sei  $X$  eine positive Zufallsvariable mit Dichte  $f$ . Dann gilt:

- (i)  $E[\log(\sqrt{X} + 3)] = \int_0^\infty f(\log(\sqrt{x} + 3))dx$ .
- (ii)  $E[\log(\sqrt{X} + 3)] = \int_0^\infty \log(\sqrt{f(x)} + 3)dx$ .
- (iii)  $E[\log(\sqrt{X} + 3)] = \int_0^\infty \log(\sqrt{x} + 3)f(x)dx$ .

**Siehe nächstes Blatt!**

**i)** Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- i) Wenn der Wert der Teststatistik im Verwerfungsbereich liegt, dann kann ein Fehler 1. Art nicht auftreten.
- ii) Wenn das Niveau eines Test vergrößert wird, dann verkleinert sich die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art.
- iii) Der Fehler 1. Art ist gleich dem Fehler 2. Art beim zweiseitigen Test.

**j)** Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-1)}, & x \geq 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und seien  $n$  Beobachtungen  $X_1, \dots, X_n$  von  $X$  gegeben. Dann ist der Maximum-Likelihood-Schätzer für  $\lambda$  gegeben durch

- (i)  $\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i - n}$ ,
- (ii)  $\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}$ ,
- (iii)  $\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i + n}$ .

## 2. (10 Punkte)

Felix untersucht zwei digitale Nachrichtenübertragungssysteme  $A$  und  $B$ . Bei jeder Nachricht wird eine Folge von Bits mit Werten 0 oder 1 gesendet. Im System  $A$  sei bei jedem Bit die Wahrscheinlichkeit einer korrekten Übertragung 90% für den Wert 0 und 70% für den Wert 1. Im System  $B$  seien die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten 80% für den Wert 0 und 90% für den Wert 1. In den gesendeten Nachrichten treten die Bits 0 und 1 gleich häufig auf.

- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, im System  $B$  ein 1-Bit zu empfangen?
- b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelnes Bit durch das System  $B$  falsch übertragen wird?
- c) Erfahrungsgemäss weiss Felix, dass die Kosten einer Fehlübertragung für ein 0-Bit 1 Rappen betragen, während die Kosten einer Fehlübertragung für ein 1-Bit 0.4 Rappen sind. Welches Übertragungssystem hat pro Bit die tieferen erwarteten Kosten?
- d) Nun betrachten wir das empfangene Bit. Wie gross ist dann im System  $A$  die Wahrscheinlichkeit, dass die Übertragung korrekt war? Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit separat für die Bit-Werte 0 und 1.

Bei e) und f) müssen die Zahlenwerte in den Resultaten nicht vereinfacht werden. In den Ergebnissen sollen aber nur Zahlen und keine Variablen stehen.

- e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine im System  $A$  empfangene Nachricht 0110111 mit der gesendeten Nachricht übereinstimmt?  
*Hinweis:* Falls Sie d) nicht gelöst haben, benutzen Sie als Wahrscheinlichkeit für die korrekte Übertragung eines Bits im System  $A$  die fiktiven Werte  $\frac{3}{5}$  für ein 0-Bit und  $\frac{7}{11}$  für ein 1-Bit.
- f) Felix macht das Experiment in e) 50 Mal. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 8 Mal die im System  $A$  empfangene Nachricht 0110111 mit der gesendeten Nachricht übereinstimmt?

### 3. (15 Punkte)

Matthias und Christoph sind Zeitungsjungen. Beide müssen auf derselben Strecke dieselbe Anzahl Zeitungen austragen. Die Zeit  $M$  (in Stunden), die Matthias für das vollständige Austragen seiner Zeitungen braucht, ist gemäss der Dichte

$$f_M(x) = \begin{cases} k(3-x) & \text{falls } 2 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

verteilt. Christophs Zeit  $C$  (in Stunden) für das vollständige Austragen der Zeitungen hat die Verteilungsfunktion

$$F_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 1, \\ \frac{1}{4}(x-1)^2 & \text{falls } 1 \leq x \leq 3, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Zufallsvariablen  $M$  und  $C$  sind voneinander unabhängig.

- a) Berechnen Sie die Konstante  $k$  so, dass  $f_M$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.
- b) Wie gross ist die erwartete Zeit, die Christoph für das vollständige Austragen der Zeitungen braucht?
- c) Reto, ein Freund von Christoph, weiss aus Erfahrung, dass seine Zeit  $R$  (in Stunden) für das vollständige Austragen der Zeitungen sich zu Christophs Zeit verhält gemäss  $R = C^2$ . Bestimmen Sie die Dichte  $f_R$  von  $R$ .
- d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Matthias mehr als 150 Minuten für das Austragen der Zeitungen braucht.
- e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Matthias und Christoph beide mehr als 150 Minuten für das Austragen der Zeitungen brauchen?
- f) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Christoph vor Matthias mit dem Austragen der Zeitungen fertig ist?

*Hinweis:* Ist  $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2$  und  $g(y) = \frac{1}{8}y^4 - \frac{7}{6}y^3 + \frac{15}{4}y^2 - \frac{9}{2}y$ , dann gilt  $f(1) = -\frac{19}{24}$ ,  $g(1) = -\frac{43}{24}$ ,  $f(2) = g(2) = -\frac{4}{3}$  und  $f(3) = g(3) = -\frac{9}{8}$ .

- g) Nun nimmt die ganze Schule an einem “Zeitungsaustragen-Wettbewerb” teil. Die Strecke ist für alle dieselbe wie oben, und die Anzahl der auszutragenden Zeitungen ist ebenfalls die gleiche. Die Anzahl der Schüler, die an diesem Wettbewerb teilnehmen, sei 501. Von den 501 klassierten Schülern belegt Christoph allein den 401. Platz. Nachdem alle Teilnehmer mit dem Zeitungsaustragen fertig sind, trifft Christoph auf eine Gruppe mit 25 Teilnehmern, die unabhängig von ihren Austragungszeiten zusammenfinden und auch in der Rangliste aufgeführt sind.
- i) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person aus dieser Gruppe schlechter platziert ist als Christoph?
  - ii) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den 25 Personen genau 5 schlechter platziert sind als Christoph?
  - iii) Wie gross ist *approximativ* die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 zufällig ausgewählten Personen mindestens 28 schlechter platziert sind als Christoph? Runden Sie das Resultat auf 3 Nachkommastellen.  
*Hinweis:* Falls Sie g) i) nicht gelöst haben, benützen Sie als Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person schlechter platziert ist als Christoph, den fiktiven Wert  $\frac{1}{4}$  und  $\sqrt{\frac{75}{4}} \approx 4$ .

**Siehe nächstes Blatt!**

#### 4. (10 Punkte)

In einer Universitätsbibliothek wird normalerweise am Ende jedes Jahres eine Bestandsaufnahme durchgeführt, wo insbesondere überprüft wird, ob die Bücher richtig eingeordnet sind. Aufgrund einer neuen besseren Organisation ist der Bibliothekar der Meinung, dass die Bestandsaufnahme dieses Jahr verschoben werden könnte. Deshalb wählt er zufällig 100 Bücher und überprüft, ob diese richtig eingeordnet sind. Falls er dadurch statistisch belegen kann, dass der wirkliche Anteil an falsch eingeordneten Büchern kleiner als 3% ist, wird die Bestandsaufnahme verschoben.

a) Unter den 100 Büchern befindet sich nur eines, das falsch eingeordnet ist. Kann die Bestandsaufnahme daher verschoben werden? Führen Sie dazu einen statistischen Test durch, und gehen Sie dabei wie folgt vor:

i) Formulieren Sie eine geeignete Null- und Alternativ-Hypothese, und geben Sie eine plausible Teststatistik an.

ii) Berechnen Sie den Verwerfungsbereich des Tests für ein Signifikanzniveau von 5%.

*Hinweis:* Benützen Sie  $0.97^{100} = 0.0475$  und  $100 \cdot 0.03 \cdot 0.97^{99} = 0.1407$ .

iii) Wie entscheidet der Test?

b) Nehmen Sie nun an, dass der wahre Anteil an falsch eingeordneten Büchern 1% beträgt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Bestandsaufnahme (unnötigerweise) verfrüht durchgeführt wird? Wie gross ist die Macht des Tests?

*Hinweis:* Benützen Sie  $0.99^{100} = 0.3660$ .

c) Um die Macht des Tests zu vergrössern, beschliesst der Bibliothekar, 1000 Bücher zu entnehmen. Nun findet er 10 Bücher, die falsch eingeordnet sind. Wie soll sich der Bibliothekar entscheiden? Führen Sie dazu wieder einen statistischen Test durch, und gehen Sie dabei wie folgt vor:

i) Formulieren Sie eine geeignete Null- und Alternativ-Hypothese, und geben Sie eine plausible Teststatistik an.

ii) Berechnen Sie den Verwerfungsbereich des Tests für ein Signifikanzniveau von 5%.

*Hinweis:* Benützen Sie diesmal eine geeignete Approximation.

iii) Wie entscheidet der Test?

*Hinweis:* Benützen Sie  $\sqrt{\frac{0.03 \cdot 0.97}{1000}} \approx 0.005$ .

## Viel Erfolg!

**Bitte wenden!**



# Antwortblatt zur Aufgabe 1

---

Bitte benützen Sie dieses Blatt um die Aufgabe 1 zu lösen, indem Sie an der entsprechenden Stelle ein Kreuz machen. Falls es in einer Zeile kein oder mehr als ein Kreuz hat, wird dies als “keine Antwort” (k. A.) gewertet.

Nur hier ausfüllen

	Antw. (i)	Antw. (ii)	Antw. (iii)	k. A.
1a)				
1b)				
1c)				
1d)				
1e)				
1f)				
1g)				
1h)				
1i)				
1j)				

*Bitte nicht ausfüllen*

richtig	falsch	k. A.

*Das folgende bitte nicht ausfüllen!*

Aufgabe 1	Korr.	Kontr.
richtig		
falsch		
k. A.		
Punkte		

**Bitte wenden!**

