

Wahrscheinlichkeit und Statistik D-INFK

| | |
|-----------------|--|
| Name: | |
| Vorname: | |
| Stud. Nr.: | |

Tabelle unten bitte nicht ausfüllen!

| Aufg. | Summe | Kontr. | Pkte.-Max. |
|-------|-------|--------|------------|
| 1 | | | 10 |
| 2 | | | 8 |
| 3 | | | 8 |
| 4 | | | 8 |

| | |
|------------------|--|
| Punktetotal: | |
| Vollständigkeit: | |

Siehe nächste Seite!

Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 2 Stunden.

Hilfsmittel: 10 A4-Seiten resp. 5 Blätter Zusammenfassung. Kein Taschenrechner!

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Tragen Sie Ihre Daten in dieses Deckblatt ein und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, rotem oder grünem Kugelschreiber.
- Um die volle Punktzahl zu erreichen, begründen Sie alle Resultate durch Zwischenschritte und -rechnungen (ausser Aufgabe 1) und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.
- Lesen Sie alle Aufgaben durch, bevor Sie beginnen. Für eine genügende Note wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben in der Ihnen zur Verfügung stehenden Zeit lösen können.
- Es dürfen sich nur erlaubte Hilfsmittel auf dem Tisch befinden, d.h. 10 A4-Seiten resp. 5 Blätter Zusammenfassung. Kein Taschenrechner!
- Die Zahlenwerte in allen Aufgaben sind so gewählt, dass man mit etwas Runden die benötigten numerischen Werte im Kopf oder mit einer einfachen Papierrechnung bekommen kann.

Siehe nächste Seite!

Antwortblatt zur Aufgabe 1

Bitte benützen Sie dieses Blatt, um die Aufgabe 1 zu lösen, indem Sie an der entsprechenden Stelle ein **Kreuz X** machen. Wird in einer Zeile kein Kreuz gemacht, so wird dies als “keine Antwort” gewertet. Falls es in einer Zeile kein oder mehr als ein Kreuz hat, wird dies ebenfalls als “keine Antwort” gewertet.

Bitte nicht ausfüllen!

| | 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|----|
| a) | | | | |
| b) | | | | |
| c) | | | | |
| d) | | | | |
| e) | | | | |
| f) | | | | |
| g) | | | | |
| h) | | | | |
| i) | | | | |
| j) | | | | |

| Richtig | Falsch | Keine Antwort |
|---------|--------|---------------|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

Bitte nicht ausfüllen!

| | 1. Korr. | 2. Korr. |
|---------------|----------|----------|
| richtig | | |
| falsch | | |
| keine Antwort | | |
| Punkte | | |

Siehe nächste Seite!

Aufgaben

1. (10 Punkte)

Bei den folgenden 10 Fragen gibt es pro richtig beantwortete Frage 1 Punkt. Pro falsche Antwort gibt es 1/2 Punkt Abzug. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte.

- a) Eine faire Münze wird zweimal geworfen. Für $i = 1, 2$ sei K_i das Ereignis, dass beim i -ten Wurf Kopf erscheint. Dann gilt:
1. K_1 und K_2 sind unabhängig.
 2. K_1 und K_2 sind disjunkt.
 3. K_1 und K_2 sind unabhängig und $K_1 \cup K_2 = \Omega$.
- b) Seien A und B zwei Ereignisse mit $P[A] > 0$ und $A \cap B = \emptyset$. Die Aussage $P[B|A] = 0$ ist
1. wahr.
 2. nicht wahr.
- c) Wir untersuchen eine Bodenprobe auf zwei Schadstoffe X und Y . Wir definieren die Ereignisse A : "Bodenprobe enthält X " und B : "Bodenprobe enthält Y ". Es sei $P[A] = 0.1$ und $P[B] = 0.3$. Zusätzlich wissen wir, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Bodenprobe keinen der beiden Schadstoffe enthält, 0.7 beträgt. Dann gilt:
1. $P[A \cap B] = 0.03$.
 2. $P[A \cap B] = 0.1$.
 3. Es gibt zu wenig Information, um $P[A \cap B]$ zu berechnen.
- d) Es sei X eine Zufallsvariable mit $E[X] = 2$, $\text{Var}(X) = 3$. Dann gilt:
1. $E[X^2] = 4$.
 2. $E[X^2] = 7$.
 3. Es gibt zu wenig Information, um $E[X^2]$ zu berechnen.
- e) Wie oft muss man einen fairen Würfel im Schnitt werfen, bis man zum ersten Mal eine 3 erhält?
1. 6 mal.
 2. 6^6 mal.
 3. $6!$ mal.

Siehe nächste Seite!

f) Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-cx}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

für ein $c > 0$. Der Median (d.h. $F_X^{-1}(\frac{1}{2})$) dieser Verteilung beträgt

1. $\frac{1}{2}$
 2. $\frac{1}{c} \ln 2$
 3. $1 - e^{-\frac{1}{2}c}$
- g) Angenommen, 10% der Bevölkerung sind Raucher. Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Raucher unter 100 zufällig ausgewählten Personen. Wie gross ist die Standardabweichung von X ?
1. 3
 2. $\sqrt{10}$
 3. 10
- h) Seien X und Y unabhängig und lognormalverteilt (eine Zufallsvariable Z ist lognormalverteilt, falls $\ln Z$ normalverteilt ist). Welche Aussage ist korrekt?
- 1) XY ist lognormalverteilt.
 - 2) XY ist normalverteilt.
 - 3) e^{X+Y} ist normalverteilt.
- i) Die stetige Zufallsvariable X habe die kumulative Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - e^{-2x}, \quad x \geq 0.$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

1. Die Dichte von X ist $f(x) = 2xe^{-2x}$, $x \geq 0$.
 2. Es ist $P[X \geq 0.5] = e^{-0.5}$.
 3. Es ist $P[X = 1] = 1 - e^{-2}$.
 4. Für $Y = 2X$ gilt $P[Y \leq 2] = 1 - e^{-2}$.
- j) Bei der Berechnung des realisierten p -Wertes eines Tests
1. muss man wissen, ob der Test einseitig oder zweiseitig ist.
 2. braucht man die konkreten Daten nicht.
 3. muss man das Signifikanzniveau α kennen.

Siehe nächste Seite!

2. (8 Punkte)

Eine Zufallsvariable Y heisst χ^2 -verteilt mit Freiheitsgrad $\nu \in \mathbb{N}$ (geschrieben $Y \sim \chi_\nu^2$), falls

$$Y = \sum_{k=1}^{\nu} Z_k^2,$$

wobei Z_1, \dots, Z_ν i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt sind.

a) (3 Punkte) Zeige, dass

$$E[Y] = \nu \quad \text{und} \quad \text{Var}(Y) = 2\nu$$

gilt.

b) (1.5 Punkte) Gib mit Hilfe der Chebyshev-Ungleichung eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P} \left[\left| \frac{Y}{\nu} - 1 \right| \leq \frac{3}{4} \right]$$

an. Wie lautet der konkrete Wert der Schranke für $\nu = 12$?

c) (3.5 Punkte) Leite eine Annäherung für die obige Wahrscheinlichkeit mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes her. Wie lautet der konkrete Wert der Approximation für $\nu = 12$?

3. (8 Punkte)

Peter und Hans sitzen pro Woche die zufälligen Zeiten P und H über ihren Stochastikserien. Peters Zeitaufwand P kann durch eine Uniform(0,1)-verteilte Zufallsvariable beschrieben werden. Hans, der gewiefere Stochastiker, braucht gegeben Peters Zeit P die zufällige Zeit H , die uniform auf $(0,P)$ verteilt ist.

- a) (2.5 Punkte) Bestimme die gemeinsame Dichte von H und P , und skizziere den Bereich, auf dem diese Dichte positiv ist.
- b) (1.5 Punkt) Bestimme die Randdichte von H .
- c) (2 Punkte) Bestimme den Erwartungswert von H . Vergleiche dies mit dem Erwartungswert von P .
- d) (2 Punkte) Bestimme die Kovarianz zwischen H und P . Sind H und P unabhängig?

4. (8 Punkte)

Unterhalb einer Kläranlage wurden 16 unabhängige Wasserproben aus einem Fluss entnommen und jeweils deren Ammoniumkonzentration X_i (angegeben in $\mu\text{gNH}_4\text{-N}/\ell$) mit einem Messgerät bestimmt. Der Mittelwert der Proben ergab $\bar{x} = 204.2$.

Wir wollen nun wissen, ob mit diesem Experiment eine Überschreitung des Grenzwerts von $200 \mu\text{gNH}_4\text{-N}/\ell$ nachgewiesen werden kann (auf dem 5%-Niveau).

a) (2 Punkte) Nimm an, die Standardabweichung der Messungen sei im Voraus aufgrund früherer Studien bekannt. Sie betrage $10 \mu\text{gNH}_4\text{-N}/\ell$. Finde einen geeigneten statistischen Test, um zu überprüfen, ob eine Grenzwertüberschreitung nachgewiesen werden kann. Wie lauten die Modellannahmen?

b) (3.5 Punkte)

Führe den Test aus Punkt a) durch. Gib dazu folgendes explizit an: die Null- und Alternativhypothesen H_0 und H_A , die Teststatistik, den realisierten Wert der Teststatistik, den Verwerfungsbereich und das Testergebnis.

c) (1.5 Punkte) Wie wahrscheinlich ist es, dass man mit 16 unabhängigen Wasserproben eine Grenzwertüberschreitung nachweisen kann, wenn die wahre Ammoniumkonzentration tatsächlich über dem Grenzwert und zwar bei $205 \mu\text{gNH}_4\text{-N}/\ell$ liegt?

d) (1 Punkt) Wie wahrscheinlich ist es, dass man mit 16 unabhängigen Wasserproben fälschlicherweise eine Grenzwertüberschreitung nachweist, obwohl die wahre Ammoniumkonzentration bei $200 \mu\text{gNH}_4\text{-N}/\ell$ liegt und den Grenzwert somit genau einhält?

Viel Erfolg!

Tabelle der Standardnormalverteilung

| | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |

Zum Beispiel ist $P[Z \leq 1.96] = 0.975$.

Tabelle der t -Verteilung

| $df \backslash \alpha$ | 0.60 | 0.70 | 0.80 | 0.90 | 0.95 | 0.975 | 0.99 | 0.995 |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| 1 | 0.325 | 0.727 | 1.376 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 |
| 2 | 0.289 | 0.617 | 1.061 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 |
| 3 | 0.277 | 0.584 | 0.978 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 |
| 4 | 0.271 | 0.569 | 0.941 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 |
| 5 | 0.267 | 0.559 | 0.920 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 |
| 6 | 0.265 | 0.553 | 0.906 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 |
| 7 | 0.263 | 0.549 | 0.896 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 |
| 8 | 0.262 | 0.546 | 0.889 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 |
| 9 | 0.261 | 0.543 | 0.883 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 |
| 10 | 0.260 | 0.542 | 0.879 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 |
| 11 | 0.260 | 0.540 | 0.876 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 |
| 12 | 0.259 | 0.539 | 0.873 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 |
| 13 | 0.259 | 0.538 | 0.870 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 |
| 14 | 0.258 | 0.537 | 0.868 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 |
| 15 | 0.258 | 0.536 | 0.866 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 |
| 16 | 0.258 | 0.535 | 0.865 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 |
| 17 | 0.257 | 0.534 | 0.863 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 |
| 18 | 0.257 | 0.534 | 0.862 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 |
| 19 | 0.257 | 0.533 | 0.861 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 |
| 20 | 0.257 | 0.533 | 0.860 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 |
| 21 | 0.257 | 0.532 | 0.859 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 |
| 22 | 0.256 | 0.532 | 0.858 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 |
| 23 | 0.256 | 0.532 | 0.858 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 |
| 24 | 0.256 | 0.531 | 0.857 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 |
| 25 | 0.256 | 0.531 | 0.856 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 |
| 26 | 0.256 | 0.531 | 0.856 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 |
| 27 | 0.256 | 0.531 | 0.855 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 |
| 28 | 0.256 | 0.530 | 0.855 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 |
| 29 | 0.256 | 0.530 | 0.854 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 |
| 30 | 0.256 | 0.530 | 0.854 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 |
| 40 | 0.255 | 0.529 | 0.851 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 |
| 60 | 0.254 | 0.527 | 0.848 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 |
| 90 | 0.254 | 0.526 | 0.846 | 1.291 | 1.662 | 1.987 | 2.368 | 2.632 |
| 120 | 0.254 | 0.526 | 0.845 | 1.289 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 |
| ∞ | 0.253 | 0.524 | 0.842 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 |

Zum Beispiel ist $P[T_9 \leq 2.262] = 0.975$.