Aufgaben und Lösungsvorschlag

1. Multiple Choice **[10 Punkte]**

Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort korrekt. Für jede richtig beantwortete Frage gibt es 1 Punkt. Für jede falsch beantwortete Frage gibt es 0.5 Punkte Abzug. Für jede nicht beantwortete Frage gibt es 0 Punkte. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte.

(a) Seien A, B und C Ereignisse. Welche der folgenden Aussagen ist allgemein wahr?

1. Falls A und B sowie A und C unabhängig sind, so sind auch A und $B \cap C$ unabhängig.
2. Falls A und B sowie B und C unabhängig sind, so sind auch A und C unabhängig.
3. Falls A, B und C unabhängig sind, so sind auch A und $B \cap C$ unabhängig.

Lösung:

Die Lösung ist 3.

(b) Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 1 und Standardabweichung 2. Dann ist

1. $E[X^2] = 3$.
2. $E[X^2] = 5$.
3. $E[X^2] = 1$.
4. $E[X^2] = 4$.

Lösung:

Die Lösung ist 2.

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-\mu x}, & \text{falls } x \geq 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\mu > 0$. Damit f zu einer Dichte wird, muss

1. $c = \mu$ sein.
2. $c = \mu e^{\mu}$ sein.
3. $c = \frac{1}{\mu}$ sein.

Lösung:

Die Lösung ist 2.

(d) Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit Dichte f_X, und sei F_X ihre Verteilungsfunktion. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen **falsch**?

1. F_X ist stetig.
2. F_X ist strikt monoton wachsend.
3. $P[a \leq X \leq b] = F(b) - F(a)$ für $-\infty < a \leq b < \infty$.

Lösung:

Die Lösung ist 2.

(e) Seien X und Y zwei reellwertige Zufallsvariablen. Welche der folgenden Aussagen ist sicher **falsch**?

1. Aus $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ kann man nicht die Unabhängigkeit von X und Y folgern.
2. Sind X und Y unabhängig, so gilt $E[XY] = E[X]E[Y]$.
3. Falls X und Y unabhängig sind, so gilt $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Lösung:

Die Lösung ist 1, denn diese Folgerung gilt, wenn zum Beispiel X und Y konstante Zufallsvariablen sind oder (X, Y) eine zweidimensionale Normalverteilung hat.

(f) Sei $X \sim Bin(n,p)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$. Die momenterzeugende Funktion von X ist

1. $M_X(t) = (1-p+pe^t)^n$.
2. $M_X(t) = (1-p)^{tn}$.
3. $M_X(t) = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$.
4. $M_X(t) = \exp\big(pn(e^t-1)\big)$.

Lösung:

Die Lösung ist 1.

(g) Sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge von Zufallsvariablen, welche alle den gleichen Erwartungswert $E[X_i] = \mu$ und die gleiche Varianz $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2$ besitzen. Sei $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Dann gilt:

1. $\overline{X}_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ in Wahrscheinlichkeit.
2. $\overline{X}_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ P-fastsicher.
3. Im Allgemeinen gilt weder 1. noch 2.

Lösung:

Die Lösung ist 3.

(h) Seien X und Y zwei reellwertige und unabhängige Zufallsvariablen. Welche der folgenden Aussagen ist allgemein wahr?

1. Falls $X \sim Exp(\lambda)$ und $Y \sim Exp(\mu)$ für $\lambda, \mu > 0$, so ist $X + Y \sim Exp(\lambda + \mu)$.
2. Falls $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ und $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ für $\lambda, \mu > 0$, so ist $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
3. Falls $X \sim \mathcal{U}(0,1)$ und $Y \sim \mathcal{U}(1,2)$, so ist $X + Y \sim \mathcal{U}(0,2)$.

Lösung:

Die Lösung ist 2.

(i) Welche von den folgenden Funktionen ist **keine** Dichte?

1. $f(x) = \dfrac{3}{4}(1-x^2)I_{\{x^2 \leq 1\}}$.
2. $g(x) = I_{[0,1/2]}(x) + 2I_{[3/4,1]}(x)$.
3. $h(x) = \dfrac{1}{2\pi}e^{-x^2/2}$.

Lösung:

Die korrekte Antwort ist 3.

(j) Falls zu einem gegebenen Test die Hypothese auf dem 2.5%-Niveau abgelehnt wird, dann

1. wird sie auch auf dem 5%-Niveau abgelehnt.
2. wird sie auch auf dem 1%-Niveau abgelehnt.
3. kann man im Allgemeinen nicht behaupten, dass sie auf einem höheren oder tieferen Niveau auch abgelehnt wird.

Lösung:

Die Lösung ist 1.

2. Autoversicherung **[10 Punkte]**

Eine Versicherungsgesellschaft hat drei Kategorien A, B und C von AutofahrerInnen unter ihren Versicherten. Personen in der Kategorie A haben eine Unfallwahrscheinlichkeit pro Jahr von 0.1, Personen in der Kategorie B von 0.3 und Personen in der Kategorie C von 0.5. In Kategorie A werden 40%, in Kategorie B 50% und in Kategorie C 10% der Versicherten eingeteilt.

(a) **[6 Punkte]**

Nehmen Sie an, dass Unfälle einer versicherten Person während verschiedenen Jahren unabhängig sind und mit konstanten Wahrscheinlichkeiten auftreten. Berechnen Sie für Personen aus den Kategorien A, B und C jeweils die Wahrscheinlichkeit, in den nächsten 5 Jahren unfallfrei zu bleiben.

(*Hinweis:* Ein Ergebnis der Form ab^c muss nicht weiter numerisch ausgerechnet werden.)

Lösung:

Sei U_i das Ereignis, dass eine zufällig gewählte Person im Jahr $i = 1, \ldots, 5$ einen Unfall hat, und K_j das Ereignis, dass eine zufällig ausgewählte Person zur Kategorie $j = A, B, C$ gehört. Aus den Angaben der Fragestellung folgt, dass

$$P[K_A] = 0.4, \quad P[K_B] = 0.5, \quad P[K_C] = 0.1$$

und

$$P[U_i|K_A] = 0.1, \quad P[U_i|K_B] = 0.3, \quad P[U_i|K_C] = 0.5$$

für $i = 1, \ldots, 5$ gilt. Aus der Unabhängigkeit folgt, dass

$$\begin{aligned}
P[U_1^c \cap U_2^c \cap U_3^c \cap U_4^c \cap U_5^c|K_A] &= \Pi_{i=1}^5 P[U_i^c|K_A] = (1 - P[U_1|K_A])^5 = (1 - 0.1)^5 = 0.9^5,\\
P[U_1^c \cap U_2^c \cap U_3^c \cap U_4^c \cap U_5^c|K_B] &= \Pi_{i=1}^5 P[U_i^c|K_B] = (1 - P[U_1|K_B])^5 = (1 - 0.3)^5 = 0.7^5,\\
P[U_1^c \cap U_2^c \cap U_3^c \cap U_4^c \cap U_5^c|K_C] &= \Pi_{i=1}^5 P[U_i^c|K_C] = (1 - P[U_1|K_C])^5 = (1 - 0.5)^5 = 0.5^5.
\end{aligned}$$

(b) **[2 Punkte]**

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine versicherte Person, von der man nicht weiss, zu welcher Kategorie sie gehört, im ersten Jahr einen Unfall hat.

Lösung:

Wir verwenden den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}
P[U_i] &= P[U_i|K_A]P[K_A] + P[U_i|K_B]P[K_B] + P[U_i|K_C]P[K_C]\\
&= \frac{1}{10}\frac{2}{5} + \frac{3}{10}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{10} = \frac{6}{25}.
\end{aligned}$$

(c) **[2 Punkte]**

Ein Kunde, der seit einem Jahr bei dieser Versicherungsgesellschaft ist, hat in diesem Jahr einen Unfall gehabt. Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Kunde zur Kategorie C gehört?

Lösung:

Mit dem Satz von Bayes folgt, dass

$$\begin{aligned} P[K_C|\ U_1] &= \frac{P[U_1|K_C]P[K_C]}{P[U_1|K_A]P[K_A] + P[U_1|K_B]P[K_B] + P[U_1|K_C]P[K_C]} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}\frac{2}{5} + \frac{3}{10}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{10}} = \frac{5/100}{(4+15+5)/100} = \frac{5}{24}. \end{aligned}$$

3. Heisse und kalte Reserve **[10 Punkte]**

Ein System besteht aus einem Bauteil A und einem Reservebauteil B. Fällt das Bauteil A aus, so übernimmt das Reservebauteil B seine Funktion. Es bezeichne T_A bzw. T_B die (zufällige) Lebensdauer des Bauteils A bzw. des Reservebauteils B (in Tagen). Das Reservebauteil B wird als heisse Reserve bezeichnet, falls es erst *nach dem Ausfall* von Bauteil A aktiviert wird, und als kalte Reserve, falls es *gleichzeitig* mit dem Bauteil A aktiviert wird. Die Lebensdauer des Systems ist also bei kalter Reserve $L_K = \max\{T_A, T_B\}$ und bei heisser Reserve $L_H = T_A + T_B$. Nehmen Sie an, dass T_A und T_B unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$ sind.

(a) [**4 Punkte**] Bestimmen Sie die Dichte f_{L_K} von L_K und die Dichte f_{L_H} von L_H.
Lösung:

Wir berechnen zuerst die Dichte von L_H. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Dichte von $T_A + T_B$ gerade die Faltung der Dichten von T_A und T_B ist, d.h.

$$f_{L_H}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{T_A}(x) f_{T_B}(z-x)dx.$$

Da $T_A, T_B \geq 0$, ist $f_{L_H}(z) = 0$ für $z < 0$. Für $z \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} f_{L_H}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{T_A}(x) f_{T_B}(z-x)dx \\ &= \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)} dx \\ &= \lambda^2 z e^{-\lambda z}. \end{aligned}$$

(Hier ist es auch OK, falls dieses Resultat aus der Vorlesung zitiert wird.)
Sei F_{L_K} die Verteilungsfunktion von L_K. Dann folgt aus der Unabhängigkeit

$$F_{L_K}(z) = P[L_K \leq z] = P[T_A \leq z, T_B \leq z] = P[T_A \leq z]P[T_B \leq z]$$

für $z \in \mathbb{R}$. Wegen $T_A, T_B \geq 0$ ist also $F_{L_K}(z) = 0$ für $z < 0$. Für $z \geq 0$ ist

$$F_{L_K}(z) = P[T_A \leq z]P[T_B \leq z] = (1 - e^{-\lambda z})^2.$$

Weil F_{L_K} überall (ausser bei $z = 0$) stetig differenzierbar ist, folgt, dass

$$f_{L_K}(z) = \frac{d}{dz} F_{L_K}(z) = \begin{cases} 2\lambda e^{-\lambda z}(1 - e^{-\lambda z}), & \text{falls } z \geq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) [**1 Punkt**] Welcher Verteilung folgt L_H?
Lösung:

Wir erkennen, dass $L_H \sim Ga(2, \lambda)$.

(c) [**3 Punkte**] Berechnen Sie die Erwartungswerte $E[L_H]$ und $E[L_K]$.

(*Hinweis:* Falls Sie die Dichte f_{L_K} in (a) nicht gefunden haben, so können Sie stattdessen mit der Dichte $f_{L_K}(z) = c(e^{-\lambda z} + e^{-3\lambda z})I_{\{z\geq 0\}}$ rechnen.)

Lösung:

Aus der Linearität des Erwartungswertes folgt, dass

$$E[L_H] = E[T_A] + E[T_B] = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}.$$

Für den Erwartungswert von L_K benutzen wir die Dichte aus (a):

$$\begin{aligned}
E[L_K] &= \int_{-\infty}^{\infty} z f_{L_K}(z) dz \\
&= \int_0^{\infty} z 2\lambda(e^{-\lambda z} - e^{-2\lambda z}) dz \\
&= 2\int_0^{\infty} z\lambda e^{-\lambda z} dz - \int_0^{\infty} z 2\lambda e^{-2\lambda z} dz \\
&= 2\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda}.
\end{aligned}$$

Hier haben wir bei der vierten Gleichheit verwendet, dass das erste Integral der Erwartungswert einer $Exp(\lambda)$-verteilten Zufallsvariablen ist und das zweite Integral der Erwartungswert einer $Exp(2\lambda)$-verteilten Zufallsvariablen.
(Falls man mit $f_{L_K}(z) = c(e^{-\lambda z} + e^{-3\lambda z})I_{\{z\geq 0\}}$ rechnet, so wird analog

$$\begin{aligned}
E[L_K] &= \int_{-\infty}^{\infty} z f_{L_K}(z) dz \\
&= \int_0^{\infty} zc(e^{-\lambda z} + e^{-3\lambda z}) dz \\
&= \frac{c}{\lambda}\int_0^{\infty} z\lambda e^{-\lambda z} dz + \frac{c}{3\lambda}\int_0^{\infty} z 3\lambda e^{-3\lambda z} dz \\
&= \frac{c}{\lambda}\frac{1}{\lambda} + \frac{c}{3\lambda}\frac{1}{3\lambda} = \frac{10c}{9\lambda^2},
\end{aligned}$$

wobei wir auch hier bei der vierten Gleichheit benutzt haben, dass das erste Integral der Erwartungswert einer $Exp(\lambda)$-verteilten Zufallsvariablen ist und das zweite Integral der Erwartungswert einer $Exp(3\lambda)$-verteilten Zufallsvariablen.)

(d) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für λ aus je n unabhängigen Beobachtungen der Lebensdauern T_A und T_B. Dazu gehört auch die Herleitung.

Lösung:

Wir haben $X_1, \dots, X_{2n}$ i.i.d. $\sim Exp(\lambda)$, weil die Bauteile A und B Lebensdauern mit der gleichen Verteilung haben und alles unabhängig ist. Die log-Likelihood-Funktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\log L(x_1, \dots, x_{2n}; \lambda) &= \log \left(\prod_{i=1}^{2n} \lambda e^{-\lambda x_i} \right) \\ &= 2n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{2n} x_i.\end{aligned}$$

Ableiten nach λ und Nullsetzen ergibt

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log L(x_1, \dots, x_{2n}; \lambda) = \frac{2n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{2n} x_i = 0.$$

Der Maximum-Likelihood-Schätzer für λ ist also

$$T_{ML} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{2n} X_i} \left(= \frac{1}{\overline{X}_{2n}} \right).$$

4. Vergleich zweier Schlafmittel **[10 Punkte]**

Die Wirkung von zwei Schlafmitteln 1 und 2 soll verglichen werden. Dazu werden $n = 9$ Patienten in zwei zeitlich klar getrennten Zeiträumen die Medikamente 1 bzw. 2 verabreicht und pro Patient die jeweilige durchschnittliche Schlafdauer (in Stunden) gemessen. Es ergaben sich folgende Daten:

Patient i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Schlafmittel 1: Schlafdauer x_i	8.3	8.7	8	8	8.35	7.6	8.1	8.5	7.8
Schlafmittel 2: Schlafdauer y_i	9	8.5	8	7.5	7	7	8.5	9	7.5

Nehmen Sie an, dass die durchschnittlichen Schlafdauern mit den Schlafmitteln 1 und 2 normalverteilt sind und dieselbe Varianz $\sigma^2 = 2/9$ (also Standardabweichung $\sigma \approx 0.47$) besitzen. Wir möchten auf dem 5%-Niveau testen, ob eines der Schlafmittel besser wirkt.

Kennzahlen: $\overline{x}_9 = 8.15$, $\overline{y}_9 = 8$.

(a) **[8 Punkte]**
Führen Sie einen geeigneten Test durch. Geben Sie dazu

i. das Modell,
ii. die Hypothese und Alternative,
iii. die Teststatistik,
iv. die Verteilung der Teststatistik unter der Hypothese,
v. den Verwerfungsbereich,
vi. den beobachteten Wert der Teststatistik, sowie
vii. den Testentscheid an.

Lösung:

i. Seien $x_1, \ldots, x_9$ bzw. $y_1, \ldots, y_9$ Realisierungen einer Stichprobe $X_1, \ldots, X_9$ bzw. $Y_1, \ldots, Y_9$. Aus der Aufgabenstellung ist es naheliegend anzunehmen, dass die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_9, Y_1, \ldots, Y_9$ alle unabhängig sind mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$ und $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$. Da uns nur interessiert, ob ein Schlafmittel besser wirkt als das andere, entsteht eine natürliche Paarung zwischen den durchschnittlichen Schlafdauern der Patienten. Deshalb definieren wir $Z_i := X_i - Y_i$. Dann sind $Z_1, \ldots, Z_9$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu_X - \mu_Y, 2\sigma^2)$ unter P_ϑ, wobei $\vartheta = \mu_X - \mu_Y$ ein unbekannter Parameter ist. Wir führen also einen zweiseitigen gepaarten Zweistichproben-z-Test durch.

ii. Die Hypothese und Alternative lauten

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \mu_0 := 0 \quad \text{und} \quad H_A : \mu_X - \mu_Y = \mu_A \neq 0.$$

iii. Da es sich um einen gepaarten Zweistichproben-z-Test handelt, wählen wir als Teststatistik

$$T = t(Z_1, \ldots, Z_n) = \frac{\overline{Z}_n}{\sqrt{2\sigma^2}/\sqrt{n}} = \frac{\overline{Z}_9}{\sqrt{4/81}} = \frac{9}{2}\overline{Z}_9.$$

iv. Unter H_0 ist $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

v. Da uns nur interessiert, ob eines der Schlafmittel besser wirkt, führen wir einen zweiseitigen Test durch, d.h. unser Vewerfungsbereich ist von der Form

$$K_{\neq} = (-\infty, -c_{\neq}) \cup (c_{\neq}, \infty)$$

für ein $c_{\neq} > 0$. Um das 5%-Niveau einzuhalten, muss

$$0.05 = P_{H_0}[T \in K_{\neq}] = 2\big(1 - \Phi(c_{\neq})\big)$$

gelten. Also ist $c_{\neq} = \Phi^{-1}(0.975) = z_{0.975} = 1.96$.

vi. Der beobachtete Wert der Teststatistik ist

$$T(\omega) = \frac{9}{2}\overline{z}_9 = \frac{9}{2}(\overline{x}_9 - \overline{y}_9) = \frac{27}{40}(= 0.675).$$

vii. Wegen $T(\omega) \notin K_{\neq}$ verwerfen wir die Hypothese nicht. Die Daten lassen also keinen statistisch signifikanten Unterschied bei den Schlafdauern mit den zwei Medikamenten erkennen.

(b) **[2 Punkte]** Beschreiben Sie in Worten, was der Fehler 2. Art ist, und bestimmen Sie mit den Tabellen dessen Wahrscheinlichkeit an der Stelle $\mu_A = 0.1$. Dabei ist μ_A die Differenz der erwarteten Schlafdauern bei den Medikamenten 1 und 2.

(*Hinweis:* Die vorhandenen Tabellen genügen, um diese Aufgabe zu lösen. Bei Bedarf können Sie grosszügig interpolieren.)

Lösung:

Der Fehler 2. Art besteht darin, die Hypothese zu akzeptieren (d.h. nicht zu verwerfen), obwohl sie falsch ist.

Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art an der Stelle $\mu_A = 0.1$ erfüllt die Gleichheit

$$P_{\mu_A}[T \notin K_{\neq}] = 1 - P_{\mu_A}[T \in K_{\neq}].$$

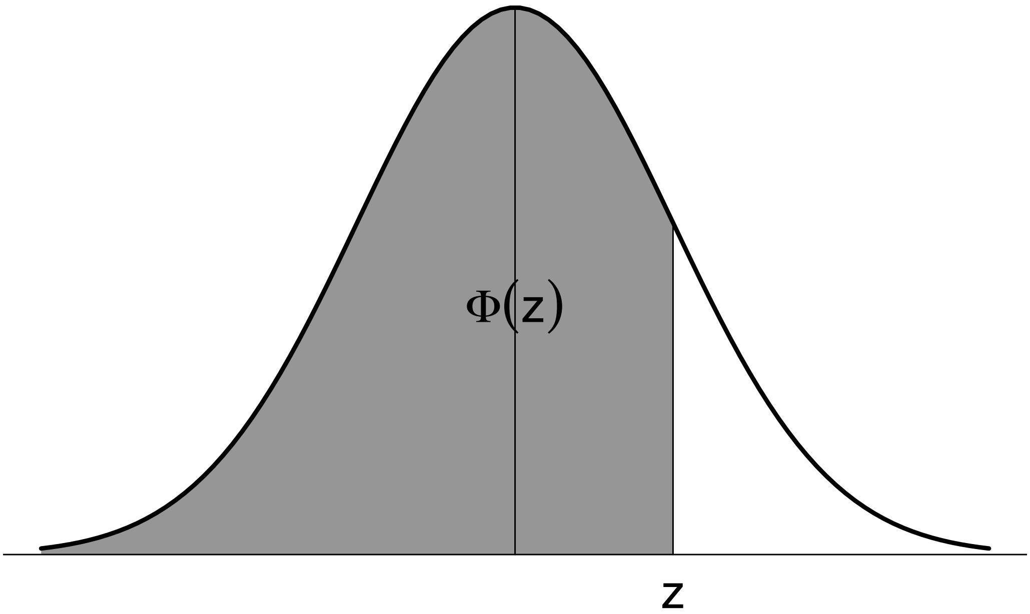
Es gilt

$$\begin{aligned}
P_{\mu_A}[T \in K_{\neq}] &= P_{\mu_A}[T \geq c_{\neq}] + P_{\mu_A}[T \leq -c_{\neq}] \\
&= P_{\mu_A}\left[\frac{\overline{Z}_9}{\sqrt{2\sigma^2/9}} \geq c_{\neq}\right] + P_{\mu_A}\left[\frac{\overline{Z}_9}{\sqrt{2\sigma^2/9}} \leq -c_{\neq}\right] \\
&= P_{\mu_A}\left[\frac{\overline{Z}_9 - \mu_A}{\sqrt{2\sigma^2/9}} \geq c_{\neq} - \frac{\mu_A}{\sqrt{2\sigma^2/9}}\right] + P_{\mu_A}\left[\frac{\overline{Z}_9 - \mu_A}{\sqrt{2\sigma^2/9}} \leq -c_{\neq} - \frac{\mu_A}{\sqrt{2\sigma^2/9}}\right] \\
&= 1 - P_{\mu_A}\left[\frac{\overline{Z}_9 - \mu_A}{\sqrt{2\sigma^2/9}} < c_{\neq} - \frac{\mu_A}{\sqrt{2\sigma^2/9}}\right] + P_{\mu_A}\left[\frac{\overline{Z}_9 - \mu_A}{\sqrt{2\sigma^2/9}} \leq -c_{\neq} - \frac{\mu_A}{\sqrt{2\sigma^2/9}}\right] \\
&= 1 - \Phi\left(c_{\neq} - \frac{\mu_A}{\sqrt{2\sigma^2/9}}\right) + \Phi\left(-c_{\neq} - \frac{\mu_A}{\sqrt{2\sigma^2/9}}\right) \\
&= 1 - \Phi(1.96 - 0.45) + \Phi(-1.96 - 0.45) \\
&= 1 - \Phi(1.51) + 1 - \Phi(2.41)
\end{aligned}$$

$$= 1 - 0.9345 + 1 - 0.9925 = 0.0655 + 0.0075 = 0.073,$$

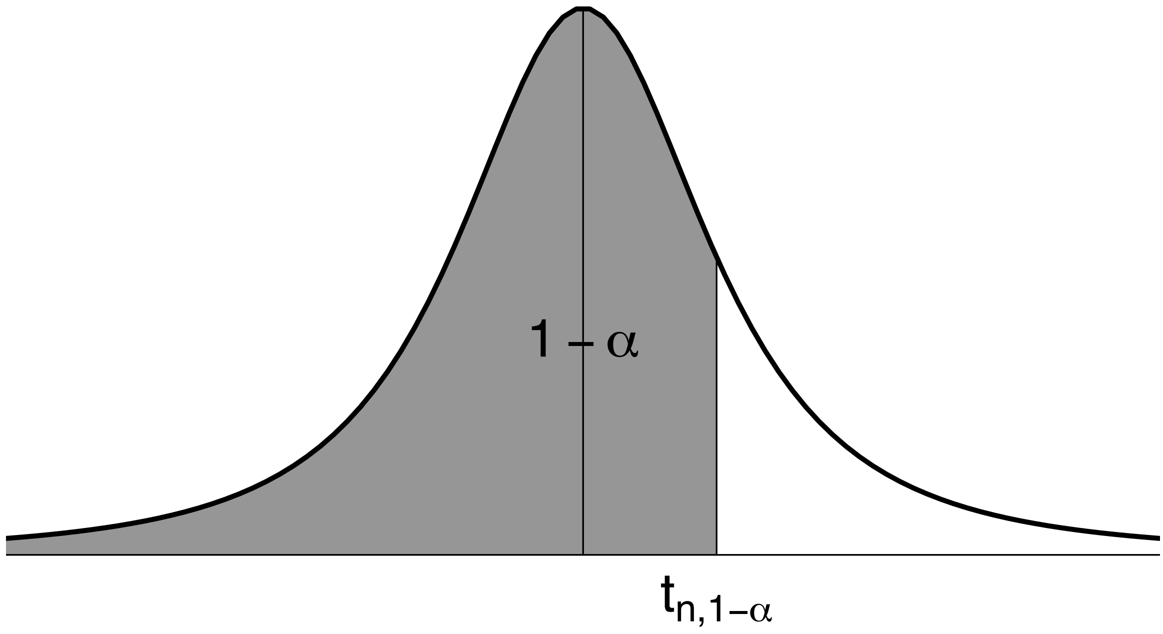
wobei die fünfte Gleichheit aus $\frac{\overline{Z}_9 - \mu_A}{\sqrt{2\sigma^2/9}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ unter P_{μ_A} folgt. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art an der Stelle $\mu_A = 0.1$ liegt somit bei ca. 0.927%. Für $\Phi(2.41)$ haben wir grob zwischen $\Phi(2.326) = 0.99$ und $\Phi(2.576) = 0.995$ (aus der letzten Zeile in der Tabelle für die t-Verteilung) interpoliert.

(*Akzeptiert* werden bei dieser Aufgabe Werte zwischen 0.0705 und 0.0755 für die Wahrscheinlichkeit $P_{\mu_A}[T \in K_{\neq}]$. Falls jemand einen Wert ≥ 0.075 auf 0.08 aufrundet, wird das auch akzeptiert. Das Gleiche gilt beim Abrunden.)



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Tabelle der Standard-Normalverteilungsfunktion $\Phi(z) = P[Z \leq z]$ mit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.


$1-\alpha$
$t_{n,1-\alpha}$

df	$t_{0.60}$	$t_{0.70}$	$t_{0.80}$	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
31	0.255	0.530	0.853	1.309	1.696	2.040	2.452	2.744
32	0.255	0.530	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
33	0.255	0.530	0.853	1.308	1.693	2.035	2.445	2.733
34	0.255	0.529	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
35	0.255	0.529	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Ausgewählte Quantile $t_{n,1-\alpha}$ der t-Verteilung; in der Tabelle ist $n = df$.
Für $df = \infty$ erhält man die Quantile $z_{1-\alpha}$ der Standard-Normalverteilung.