Musterlösung

1. a) 3 b) 2 c) 3 d) 3 e) 1 f) 1 g) 2 h) 1 i) 3 j) 3

2. **a)** Aus $\int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = \frac{1}{3} + 2 - \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$ folgt $c = \frac{6}{5}$.

b) $E[X] = \int_0^2 x f(x)\,dx = c[\int_0^1 x^3\,dx + \int_1^2 (2x - x^2)\,dx] = c[1/4 + 3 - 7/3] = 11/10$.

c) Verteilungsfunktion:

$$F(t) = \int_0^t f(x)\,dx = c\int_0^t x^2\,dx = ct^3/3 = \frac{2}{5}t^3, \quad t \in [0,1],$$

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t f(x)\,dx = c\Big[\int_0^1 x^2\,dx + \int_1^t (2-x)\,dx\Big] \\ &= c\Big[\frac{1}{3} + 2(t-1) - \frac{1}{2}(t^2-1)\Big] = c\Big[-\frac{7}{6} + 2t - \frac{t^2}{2}\Big] \\ &= \frac{1}{5}\Big[-7 + 12t - 3t^2\Big], \quad t \in [1,2], \end{aligned}$$

weiter ist $F(t) = 0$ für $t < 0$ und $F(t) = 1$ für $t > 2$.

d) Variante 1: Man sieht anhand der Dichte (quadratisch vs. affin linear, zB Skizze machen), dass $P[X \le 1] < P[X \ge 1]$, also mehr Schüsse auf die obere Hälfte.

Variante 2: Berechne $F(1) = \int_0^1 f(x)\,dx = c\int_0^1 x^2\,dx = c/3 = \frac{2}{5} < 1/2$ bzw. setze $t = 1$ ein in c) - also mehr Schüsse auf die obere Hälfte.

e) i) $p = P[\{\text{Abwehr}\}] = P[\{\text{Abwehr}\} \cap \{\text{aufs Tor}\}] =$
$= P[\{\text{Abwehr}\} \mid \{\text{aufs Tor}\}] \times P[\{\text{aufs Tor}\}] = 3/20 \times 2/3 = 1/10$.

ii) Anzahl Y is binomial $(n = 10, p = 1/10)$ verteilt, d.h.

$$P[Y = k] = \binom{10}{k} 0.1^k 0.9^{10-k}, \quad k = 0, \dots, 10.$$

iii) Wartezeit Z hat negativbinomiale Verteilung. Wartezeit auf r-ten Erfolg ($r = 1$ Mio.$/10'000 = 100$) hat $E[Z] = r/p = 100/.1 = 1000$. Die Gewichtsfunktion ist

$$P[Z = k] = \binom{k-1}{99} 0.1^r 0.9^{k-r}, \quad k = r, r+1, \dots.$$

3. Variante 1 (Wahrscheinlichkeiten):

a) Wir definieren die folgenden Ereignisse:

- $Z = \{$"Eine verkaufte Wohnung lag in der Stadt Zürich"$\}$
- $W = \{$"Eine verkaufte Wohnung lag in Winterthur"$\}$
- $R = Z^c \cap W^c$
- $E = \{$"Eine verkaufte Wohnung war eine Einzimmerwohnung"$\}$.

Aus der Aufgabenstellung ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten: $P(Z) = 0.5$, $P(W) = 0.3$, $P(R) = 0.2$, $P(E|Z) = 0.4$, $P(E|W) = 0.5$ und $P(E|R) = 0.3$. Nach dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$P(E) = P(E|Z)P(Z) + P(E|W)P(W) + P(E|R)P(R) = 0.4 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.2 = 0.41.$$

b) Mit Aufgabenteil a) und der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit folgt

$$P(Z|E^c) = \frac{P(Z \cap E^c)}{P(E^c)} = \frac{P(Z) - P(Z \cap E)}{1 - P(E)} = \frac{\big(1 - P(E|Z)\big)P(Z)}{1 - P(E)} = \frac{(1-0.4)\cdot 0.5}{1 - 0.41} = \frac{0.3}{0.59} = \frac{30}{59}.$$

c) Aus der Aufgabenstellung folgt:

$$\begin{aligned} P(E^c|Z) &= 1 - P(E|Z) = 0.6 \\ P(E^c|W) &= 1 - P(E|W) = 0.5 \\ P(E^c|R) &= 1 - P(E|R) = 0.7. \end{aligned}$$

Sei B das Ereignis, dass eine verkaufte Wohnung einen Balkon hatte. Nach dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit und der Multiplikationsregel gilt

$$\begin{aligned} P(B \cap Z) &= P(B|E \cap Z)P(E \cap Z) + P(B|E^c \cap Z)P(E^c \cap Z) \\ &= P(B|E \cap Z)P(E|Z)P(Z) + P(B|E^c \cap Z)P(E^c|Z)P(Z) \\ &= 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.5 = 0.23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B \cap W) &= P(B|E \cap W)P(E \cap W) + P(B|E^c \cap W)P(E^c \cap W) \\ &= P(B|E \cap W)P(E|W)P(W) + P(B|E^c \cap W)P(E^c|W)P(W) \\ &= 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.3 = 0.105 \end{aligned}$$

und

$$P\Big(B \cap (Z \cup W)\Big) = P(B \cap Z) + P(B \cap W) = 0.335.$$

Hieraus folgt

$$P\Big(W \Big| B \cap (Z \cup W)\Big) = \frac{P\big(B \cap W\big)}{P\big(B \cap (Z \cup W)\big)} = \frac{0.105}{0.335} = \frac{21}{67}.$$

Variante 2 (Anzahl): Aus der Aufgabenstellung ergibt sich die Anzahl der verkauften Wohnungen wie folgt:

	Stadt Zürich	Winterthur	Rest	Total
Einzimmerwohnung	40*	30	12	82
Keine Einzimmerwohnung	60	30	28	118
Total	100	60	40	200

*Das heisst, dass in der Stadt Zürich 40 Einzimmerwohungen verkauft wurden; usw.

Balkon	Stadt Zürich	Winterthur	Rest	Total
Einzimmerwohnung	16*	9	3	28
Keine Einzimmerwohnung	30	12	21	63
Total	46	21	24	91

*Das heisst, dass 16 in der Stadt Zürich verkaufte Einzimmerwohnungen einen Balkon hatten; usw.

Hieraus ergeben sich die gesuchten Wahrscheinlichkeiten

a) $P(E) = \frac{82}{200} = 0.41$

b) $P(Z|E^c) = \frac{60}{118} = \frac{30}{59}$

c) $P\big(W\big|B \cap (Z \cup W)\big) = \frac{P(W \cap B)}{P\big(B \cap (Z \cup W)\big)} = \frac{21}{46+21} = \frac{21}{67}$.

d) **Variante 1:** Das Ereignis $\{N_A + N_B = 3\}$ lässt sich wie folgt durch Elementarereignisse beschreiben

$$\begin{aligned}\{N_A + N_B = 3\} = \{N_A = 3,\ N_B = 0\} &\cup \{N_A = 2,\ N_B = 1\} \\ &\cup \{N_A = 1,\ N_B = 2\} \cup \{N_A = 0,\ N_B = 3\}.\end{aligned}$$

Dies ergibt mit der Additionsregel

$$\begin{aligned}P(N_A + N_B = 3) &= P(N_A = 3,\ N_B = 0) + P(N_A = 2,\ N_B = 1) \\ &\quad + P(N_A = 1,\ N_B = 2) + P(N_A = 0,\ N_B = 3) \\ &= \frac{2^3}{3!}e^{-2}e^{-3} + \frac{2^2}{2!}e^{-2}\frac{3}{1!}e^{-3} + \frac{2}{1!}e^{-2}\frac{3^2}{2!}e^{-3} + e^{-2}\frac{3^3}{3!}e^{-3} \\ &= \frac{8 + 36 + 54 + 27}{6}e^{-5} = \frac{125}{6}e^{-5},\end{aligned}$$

da N_A und N_B unabhängige, Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parameter 2 und 3 sind.

Variante 2: Da N_A und N_B unabhängige Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parametern 2 und 3 sind, ist $N = N_A + N_B$ eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $5 = 2 + 3$, d.h., $N \sim \mathcal{P}(5)$. Dies ergibt für die Wahrscheinlichkeit $P(N = 3) = \frac{5^3}{3!}e^{-5} = \frac{125}{6}e^{-5}$.

e) Wir suchen eine Approximation der Wahrscheinlichkeit $P\Big(\sum_{k=1}^{16} T_k \leq 5\Big)$. Da T_k für $k = 1, 2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert $m = \frac{1}{2}$ und Varianz $\sigma^2 = \frac{1}{4}$ sind, gilt nach dem zentralen Grenzwertsatz, dass

$$S_{16}^* = \frac{\sum_{k=1}^{16} T_k - 16m}{\sigma\sqrt{16}} = \frac{\sum_{k=1}^{16} T_k - 8}{2}$$

approximativ standardnormal verteilt ist. Dies ergibt

$$\begin{aligned}P\left(\sum_{k=1}^{16} T_k \leq 5\right) &= P\left(\frac{\sum_{k=1}^{16} T_k - 8}{2} \leq \frac{5-8}{2}\right) = P\left(S_{16}^* \leq -\frac{3}{2}\right) \\ &\approx \Phi\left(-\frac{3}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - 0.9332 = 0.0668,\end{aligned}$$

wobei der Wert $\Phi\left(\frac{3}{2}\right) = 0.9332$ der Tabelle der standard Normalverteilung im Anhang der Prüfung entnommen ist.

4. **a)** Mittels eines Binomial-Tests möchten wir testen ob Christoph hellseherische Fähigkeiten besitzt oder nicht. Wir gehen dabei wir folgt vor:

i) H_0: Christoph besitzt keine hellseherische Fähigkeiten, d.h. $X \sim Bin(n,p)$ mit $p = 1/2$.
H_A: Christoph besitzt hellseherische Fähigkeiten, d.h. $X \sim Bin(n,p)$ mit $p > 1/2$.

ii) Der Test ist einseitig durchzuführen. Wir möchten herausfinden ob Christoph's Vorhersagen *häufiger korrekt* sind (d.h. $p > 1/2$) sind als diejenigen einer Person die einfach zufällig etwas tippt (d.h. $p = 1/2$).

iii) Sei wieder X die Anzahl korrekter Vorhersagen aus n Versuchen. Unter H_0 ist also $X \sim Bin(p = 1/2, n = 100)$ und somit verwerfen wir H_0 für alljene $k \in \mathbb{N}$, für welche $P_{H_0}(X \geq k) \leq 0.05$. Durch Ablesen von der Binomialtabelle erhalten wir $P_{H_0}(X \geq 58) = 1 - P_{H_0}(X \leq 57) = 0.0666$ und $P_{H_0}(X \geq 59) = 0.0443$. Der Verwerfungsbereich V ist also gegeben durch $V = \{k \in \mathbb{N} : k \geq 59\}$.

iv) Testentscheidung: Christoph hat von den 100 Mal 60 Mal korrekt vorhergesagt und somit verwerfen wir H_0, denn $60 \in V$.

b) Gesucht ist die Macht des Binomial-Tests aus a) für die Alternativhypothese $H_A : X \sim Bin(100, 0.6)$. Die Macht ist die Wahrscheinlichkeit H_0 zu verwerfen unter der Annahme dass H_A korrekt ist, also $P_{H_A}(X \in V)$. Laut Binomial-Tabelle gilt mit dem korrekten Verwerfungsbereich aus a) $V = \{k \in \mathbb{N} : k \geq 59\}$ also $P_{H_A}(X \in V) = P_{H_A}(X \geq 59) = 1 - P_{H_A}(X \leq 58) = 0.6225$. Im Falle des in der Aufgabe angegebenen Verwerfungsbereichs $V = \{k \in \mathbb{N} : k \geq 55\}$ erhält man analog $P_{H_A}(X \geq 55) = 0.8689$.

c) Seien $X_i \overset{iid}{\sim} Bin(p,n)$ für $i = 1, \ldots m$. Die Gewichtsfunktion für ein einzelnes X_i ist gegeben durch $p(x_i, p) = P(X_i = x_i) = \binom{n}{x_i} p^{x_i}(1-p)^{n-x_i}$. Die Likelihood-Funktion ist also gegeben durch

$$L(x_1, \ldots, x_m; p) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_m = x_m; p) = \prod_{i=1}^{m} \binom{n}{x_i} p^{x_i}(1-p)^{n-x_i}.$$

Logarithmieren liefert die log-Likelihoood-Funktion

$$\log L(x_1, \ldots, x_m; p) = \ell(x_1, \ldots, x_m; p) = \sum_{i=1}^{m} \left(\log \binom{n}{x_i} + x_i \log p + (n - x_i) \log (1-p) \right)$$

und somit

$$\frac{\partial}{\partial p} \ell(x_1, \ldots, x_m; p) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{m} x_i - \frac{1}{1-p} \sum_{i=1}^{m} (n - x_i) \overset{!}{=} 0.$$

Einsetzten der Zufallsvariablen $(X_i)_{1 \leq i \leq m}$ und Auflösen nach p liefert schliesslich wie $\widehat{p} = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^{m} X_i$.
Bemerkung: Da $\frac{\partial^2}{\partial p^2} \ell(x_1, \ldots, x_m; p) < 0$ für alle $p \in [0,1]$ ist $\widehat{p}$ wirklich ein Maximum und somit der Maximum-Likelihood-Schätzer für p.