Basisprüfung D-INFK

1. (10 Punkte)

Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig. Es gibt pro richtig beantwortete Frage 1 Punkt und pro falsche Antwort 1/2 Punkt Abzug. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte. Bitte benützen Sie das beiliegende Antwortblatt.

a) Seien A und B zwei Ereignisse mit $P[A] = 1/2$, $P[B] = 1/3$ und $P[A|B] = 1/4$. Wie gross ist dann $P[A^c|B]$, wobei A^c das Komplement von A bezeichnet?

1) 1/12 2) 1/4 3) 3/4

b) Sei X eine uniform auf $(-1.5, 1.5)$-verteilte Zufallsvariable. Die Varianz $\mathrm{Var}(X)$ von X ist

1) 1/2 2) 3/4 3) 2

c) Student Peter notiert während der Vorlesung alles, was die Professorin an die Tafel schreibt. Da er nicht immer aufmerksam ist, macht er ab und zu Abschreibfehler. Wir nehmen an, dass die Anzahl Fehler pro abgeschriebener Seite unabhängig Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = 3$ sei. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Peters Vorlesungsmitschrift, die sich über zwei Seiten erstreckt, fehlerfrei ist?

1) $2\exp(-3)$ 2) $3^2\exp(-3)/2!$ 3) $\exp(-6)$

d) Der Schweizer Ständerat besteht aus 46 Mitgliedern, nämlich zwei aus jedem der 23 Kantone (für diese Aufgabe werden jeweils zwei Halbkantone zu einem Kanton zusammengefasst). Nun werden zufällig 3 Mitglieder für eine Kommission bestimmt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Personen aus unterschiedlichen Kantonen kommen?

1) $\frac{46\times 44\times 42}{46^3}$ 2) $\frac{\binom{46}{3}-23}{\binom{46}{3}}$ 3) $\frac{14}{15}$

e) Die Zufallsvariable X habe eine Verteilungsfunktion F_X mit zugehöriger Dichte f_X. Wir definieren

$$Y = \begin{cases} 1 & , \quad X \geq 0, \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt dann:

1) Y ist Bernoulli-verteilt,
2) die Dichte f_Y von Y erfüllt $f_Y(y) = f_X(y)$, $y \geq 0$,
3) die Dichte f_Y von Y erfüllt $f_Y(y) = 1$, $y \geq 0$.

f) Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit Erwartungswerten $E[X] = 0$, $E[Y] = 2$, Varianzen $\mathrm{Var}(X) = 1$, $\mathrm{Var}(Y) = 3$ und Kovarianz $\mathrm{Cov}(X, Y) = -1$. Die Varianz $\mathrm{Var}(2X + Y)$ von $2X + Y$ ist dann

1) 3 2) 5 3) 7

g) Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit $E[X] = 0$, $E[Y] = 0$ und $E[XY] = 0$. Es gilt:

1) X und Y sind unkorreliert und unabhängig,
2) X und Y sind unkorreliert, im Allgemeinen aber nicht unabhängig,
3) X und Y sind im Allgemeinen weder unkorreliert noch unabhängig.

h) Aus einer Urne mit 5 weissen und 95 schwarzen Kugeln wird 40 mal zufällig eine Kugel gezogen und wieder zurückgelegt. Sei A das Ereignis, dass total mindestens 10 weisse Kugeln gezogen werden. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

1) wegen der Chernoff-Schranke gilt $P[A] \leq \left(\frac{e^4}{5^5}\right)^2$,
2) $P[A] = \sum_{j=10}^{40} 0.05^j 0.95^{40-j}$,
3) wegen der Chebyshev-Ungleichung gilt $P[A] > \frac{40 \times 0.05 \times 0.95}{8^2}$.

i) Seien $X_1, \ldots, X_n$ mit $n \geq 2$ unabhängige $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen für fixierte $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Setze $\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Es gilt:

1) $T_1 := \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2}$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für σ,
2) $T_2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für σ^2,
3) $T_3 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für σ^2.

j) Sei α das Niveau eines statistischen Tests. Es gilt:

1) wenn α verkleinert wird, vergrössert sich der Verwerfungsbereich,
2) wenn α verkleinert wird, vergrössert sich die Macht des Tests,
3) weder 1) noch 2) ist richtig.

2. (12 Punkte)

Fussballer Diego ist Torwart. Er studiert die Statistiken und stellt fest, dass die Höhe X der Penaltys, die aufs Tor gehen, gemäss der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & 0 \le x \le 1 \\ c(2-x), & 1 < x \le 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

verteilt ist. (Der Ball ist hier punktförmig und das Tor 2 m hoch.)

a) Berechnen Sie die Konstante c so, dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

c) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X.

d) Kommen mehr Penaltys auf die obere oder die untere Hälfte des Tores? (*Antwort ist zu begründen!*)

e) Für jeden abgewehrten Penalty bekommt Diego eine Prämie von 10'000 Fr. (aber keine Prämie, falls der Ball neben das Tor geschossen wurde). Wir nehmen an, dass es pro Spiel genau einen Penalty gegen Diegos Mannschaft gibt und dass seine Leistungen bei den verschiedenen Spielen unabhängig voneinander sind.

Falls der Ball aufs Tor kommt, hält Diego mit einer Wahrscheinlichkeit von 15% (= 3/20). Allerdings wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/3 daneben geschossen.

i) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Diego für einen (zufällig gewählten) Penalty eine Prämie bekommt?
Falls diese Teilaufgabe nicht gelöst wird, kann man mit dem Wert 1/5 fortfahren.

ii) Was ist die Verteilung der Anzahl der gehaltenen Penaltys aus 10 geschossenen? Man gebe die Gewichtsfunktion der Verteilung an.
Das Resultat muss nicht begründet werden und nicht numerisch ausgerechnet werden.

iii) Wie lange (=wieviele Spiele) dauert es, bis Diego 1 Mio. Fr. an Prämien kassiert hat? Man gebe den Erwartungswert und die Gewichtsfunktion der Verteilung an.
Das Resultat muss nicht begründet werden und nicht numerisch ausgerechnet werden.

3. (12 Punkte)

Ein Immobilienbüro zieht Bilanz. Im vergangenen Geschäftsjahr wurden ingesamt 200 Wohnungen verkauft, 100 hiervon in der Stadt Zürich und 60 in Winterthur. Von den in der Stadt Zürich verkauften Wohnungen waren 40% Einzimmerwohnungen, von denen in Winterthur 50% und von den restlichen 30%.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine (zufällig ausgewählte) verkaufte Wohnung eine Einzimmerwohnung war.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine (zufällig ausgewählte) verkaufte Wohnung in der Stadt Zürich lag, gegeben, dass sie keine Einzimmerwohnung war.

Die folgende Tabelle gibt den Anteil der verkauften Wohnungen an, die einen Balkon hatten.

	Stadt Zürich	Winterthur	Rest
Einzimmerwohnung	40%*	30%	25%
Keine Einzimmerwohnung	50%	40%	75%

*Das heisst, von den verkauften Einzimmerwohnungen in der Stadt Zürich hatten 40% einen Balkon; usw.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine (zufällig ausgewählte) verkaufte Wohnung in Winterthur war, gegeben, dass sie einen Balkon hatte und in der Stadt Zürich oder Winterthur lag.

Das Immobilienbüro beschäftigt für den Verkauf der Wohnungen zwei Makler A und B. Die Anzahl der verkauften Wohnungen am ersten Arbeitstag des neuen Geschäftsjahres von Makler A wird mit N_A und die von Makler B mit N_B bezeichnet. Wir nehmen an, dass N_A und N_B unabhängige, Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parameter 2 bzw. 3 sind, d.h., $N_A \sim \mathcal{P}(2)$ und $N_B \sim \mathcal{P}(3)$.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Makler A und B an diesem Tag zusammen 3 Wohnungen verkaufen.
Hinweis: Terme der Form $6e^{-9}$ usw. können im Ergebnis stehen gelassen werden. Vereinfachen Sie aber trotzdem soweit wie möglich.

Die Zeitspanne (in Arbeitstagen) zwischen dem $(k-1)$-ten und k-ten Verkauf einer Wohnung von Makler A wird mit T_k für $k = 1, 2, \ldots$ bezeichnet. Es wird angenommen, dass die T_k unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert $\frac{1}{2}$, Varianz $\frac{1}{4}$ und Wertebereich $[0, \infty)$ sind. Makler A erhält einen Bonus zu seinem Gehalt, falls er innerhalb einer Arbeitswoche (fünf Arbeitstage) mindestens sechzehn Wohnungen verkauft.

e) Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Approximation die Wahrscheinlichkeit, dass Makler A in der nächsten Arbeitswoche einen Bonus erhält.

4. (10 Punkte)

Christoph und Matthias fragen sich, ob Christoph wohl hellseherische Fähigkeiten besitzt. Um das zu testen, verlangt Matthias, dass Christoph in einer Reihe von n (unabhängigen) Würfen einer fairen Münze das Auftreten von Kopf oder Zahl korrekt vorhersagt. Die Anzahl X von korrekten Vorhersagen aus n Versuchen habe die Verteilung $X \sim Bin(n, p)$ mit p als Erfolgswahrscheinlichkeit im Einzelfall.

a) Christoph hat in 100 Versuchen 60 Mal richtig gelegen mit seiner Vorhersage. Soll man nun Christoph hellseherische Fähigkeiten zuschreiben, oder war das purer Zufall? Führen Sie dazu einen statistischen Test durch, und gehen Sie dabei wie folgt vor:

i) Formulieren Sie eine geeignete Null- und Alternativ-Hypothese.

ii) Ist der Test ein- oder zweiseitig durchzuführen? Begründen Sie kurz!

iii) Berechnen Sie den Verwerfungsbereich V des Tests für ein Signifikanzniveau von 5%.

iv) Wie entscheidet der Test?

b) Angenommen, Christoph habe tatsächlich hellseherische Fähigkeiten und die wahre Vorhersagewahrscheinlichkeit sei $p = 0.6$. Wie gross ist in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit, dass er auch als "Hellseher" eingestuft wird, d.h. die Nullhypothese auch tatsächlich verworfen wird? *Falls Sie Teilaufgabe a) nicht lösen konnten, verwenden Sie als Verwerfungsbereich* $V = \{k \in \mathbb{N} : k \geq 55\}$.

c) Der Versuch aus a) werde nun mit 50 verschiedenen Personen durchgeführt, d.h. wir betrachten unabhängig und identisch verteilte $X_i \sim Bin(n, p)$ für $i = 1, \ldots, 50$. Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihod-Schätzer von p für $n = 100$ gegeben ist durch

$$\widehat{p}^{ML} = \frac{1}{100} \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} X_i.$$

Viel Erfolg!

Antwortblatt zur Aufgabe 1

Bitte benützen Sie dieses Blatt um die Aufgabe 1 zu lösen, indem Sie bei der richtigen Antwort ein Kreuz machen. Falls es in einer Zeile kein oder mehr als ein Kreuz hat, wird dies als "keine Antwort" gewertet.

	Antwort 1	Antwort 2	Antwort 3	keine Antwort
1a)				
1b)				
1c)				
1d)				
1e)				
1f)				
1g)				
1h)				
1i)				
1j)				

bitte nicht ausfüllen

richtig	falsch	k.A.

Das Folgende bitte nicht ausfüllen!

Aufg. 1	Korr.	Kontr.
richtig		
falsch		
keine Antwort		
Punkte		