Aufgaben und Lösungsvorschlag

1. Multiple Choice **[10 Punkte]**

Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort korrekt. Für jede richtig beantwortete Frage gibt es 1 Punkt. Für jede falsch beantwortete Frage gibt es 0.5 Punkte Abzug. Für jede nicht beantwortete Frage gibt es 0 Punkte. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte.

(a) Seien A und B zwei Ereignisse mit $P[B] > 0$. Die Aussage „A und B sind unabhängig genau dann, wenn $P[A|B] = P[A]$" ist dann im Allgemeinen

1. wahr.
2. falsch.

Lösung:

Die Lösung ist 1.

(b) Sei $P[A] = 0.4$, $P[B] = 0.5$ und $P[(A \cup B)^c] = 0.8$. Dann gilt:

1. A und B sind unabhängig.
2. A und B sind nicht unabhängig.
3. Es gibt zu wenig Informationen, um zwischen 1. oder 2. zu entscheiden.

Lösung:

Die Lösung ist 2.

(c) Sei $X \sim \mathcal{U}(a, a+1)$ mit $\operatorname{Var}[X] = \frac{1}{12}$, wobei $a \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen korrekt?

1. $a = 0$.
2. $a = -\frac{1}{2}$.
3. Es sind zu wenig Informationen vorhanden.

Lösung:

Die Lösung ist 3.

(d) Sei $X \sim Exp(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Falls $\operatorname{Var}[X] = \frac{1}{4}$, so ist

1. $\lambda = 1/2$.
2. $\lambda = \sqrt{2}$.
3. $\lambda = 2$.

Lösung:

Wegen $\operatorname{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4}$ ist $\lambda = 2$. Also ist 3. korrekt.

(e) Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen und je $\mathcal{P}(\lambda)$-verteilten Zufallsvariablen, und sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

1. $\dfrac{S_n - n\lambda}{\lambda\sqrt{n}} \overset{\text{approx.}}{\backsim} \mathcal{N}(0,1)$ für n gross.
2. $\dfrac{S_n - n\lambda^2}{\lambda\sqrt{n}} \overset{\text{approx.}}{\backsim} \mathcal{N}(0,1)$ für n gross.
3. $\dfrac{S_n - n\lambda}{\sqrt{\lambda n}} \overset{\text{approx.}}{\backsim} \mathcal{N}(0,1)$ für n gross.

Lösung:

Wegen $E[X_i] = \lambda$ und $\mathrm{Var}[X_i] = \lambda$ ist mit dem zentralen Grenzwertsatz die Antwort 3. korrekt.

(f) Sei Ω eine endliche und nichtleere Menge von Elementarereignissen. Die Anzahl Elemente in der Potenzmenge 2^Ω

1. ist immer gerade.
2. ist immer ungerade.
3. hängt im Allgemeinen von $|\Omega|$ ab.

Lösung:

Die Lösung ist 1, da $|2^\Omega| = 2^{|\Omega|}$ immer gerade ist.

(g) Seien X und Y zwei Zufallsvariablen, welche beide den Wertebereich $\{0,1,2\}$ haben. Die gemeinsame Gewichtsfunktion $p(i,j) = P[X = i, Y = j]$ ist gegeben durch

$p(i,j)$	$j=0$	$j=1$	$j=2$
$i=0$	$1/3$	$1/8$	$1/8$
$i=1$	$1/6$	0	0
$i=2$	0	$1/8$	$1/8$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P[X = 0|Y = 2]$ ist gleich

1. $\frac{1}{4}$
2. $\frac{2}{3}$
3. $\frac{1}{2}$

Lösung:

Wegen $P[Y = 2] = 1/4$ und $P[X = 0, Y = 2] = 1/8$ ist die Lösung 3.

(h) Seien $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. mit Dichte

$$f_\vartheta(x) = \begin{cases} (\vartheta - 1)x^{-\vartheta}, & x \geq 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\vartheta \in (1,\infty)$ ein unbekannter Parameter ist. Der Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ lautet dann

1. $T = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^n \log X_i}$.

2. $T = 1 + \dfrac{n}{\sum_{i=1}^n \log X_i}$.
3. $T = \dfrac{n}{\vartheta - 1} - \sum_{i=1}^n \log X_i$.

Lösung:

Die Lösung ist 2. Die log-Likelihood-Funktion lautet

$$\begin{aligned}\log L(x_1, \dots, x_n; \vartheta) &= \log \prod_{i=1}^n (\vartheta - 1) x_i^{-\vartheta} \\ &= \sum_{i=1}^n \big(\log(\vartheta - 1) - \vartheta \log x_i \big) \\ &= n \log(\vartheta - 1) - \vartheta \sum_{i=1}^n \log x_i.\end{aligned}$$

Die Ableitung der log-Likelihood-Funktion nach ϑ ist

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log L(x_1, \dots, x_n; \vartheta) = \frac{n}{\vartheta - 1} - \sum_{i=1}^n \log x_i,$$

und diese ist 0 für $\vartheta = 1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log x_i}$. Der ML-Schätzer für ϑ ist also $T = 1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log X_i}$.

(i) Seien X und Y reelle Zufallsvariablen. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen **falsch**?

1. $\mathrm{Var}[X] \geq 0$.
2. $\mathrm{Var}[X + Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$.
3. $\mathrm{Var}[aX + b] = a^2 \mathrm{Var}[X]$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Die Lösung ist 2.

(j) Sei $Z = (X, Y)$ eine $\mathbb{R}^2$-wertige Zufallsvariable mit Dichte

$$f_Z(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

1. X und Y sind korreliert und nicht unabhängig.
2. X und Y sind unkorreliert und nicht unabhängig.
3. X und Y sind unkorreliert und unabhängig.

Lösung:

Schreiben wir $f_Z(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$, so sehen wir, dass X und Y beide $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt sind und dass $f_Z(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ gilt. Also ist die Lösung 3.

2. Bedingte Poisson-Verteilung **[10 Punkte]**

Seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ und $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, wobei $\lambda, \mu > 0$.

(a) [**5 Punkte**] Zeigen Sie, dass $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Lösung:

Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\begin{aligned}
P[X+Y=k] &= \sum_{\ell=0}^{\infty} P[X+Y=k, Y=\ell] \\
&= \sum_{\ell=0}^{k} P[X+Y=k, Y=\ell] \\
&= \sum_{\ell=0}^{k} P[X=k-\ell, Y=\ell] \\
&= \sum_{\ell=0}^{k} P[X=k-\ell]P[Y=\ell] \\
&= \sum_{\ell=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-\ell}}{(k-\ell)!}e^{-\mu}\frac{\mu^{\ell}}{\ell!} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{1}{k!}\sum_{\ell=0}^{k}\frac{k!}{(k-\ell)!\ell!}\lambda^{k-\ell}\mu^{\ell} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Dabei benutzt die erste Gleichheit den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und die vierte Gleichheit die Unabhängigkeit von X und Y. Somit ist $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

(b) [**3 Punkte**] Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass X unter der Bedingung $X + Y = n$ binomialverteilt ist mit Parametern n und $p = \lambda/(\lambda + \mu)$, d.h. es gilt

$$P[X=k|X+Y=n] = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-k} \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Lösung:

Sei $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Aus (a) und der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit folgt, dass

$$\begin{aligned}
P[X=k|X+Y=n] &= \frac{P[X=k, X+Y=n]}{P[X+Y=n]} \\
&= \frac{P[X=k, Y=n-k]}{P[X+Y=n]} \\
&= \frac{P[X=k]P[Y=n-k]}{P[X+Y=n]}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{\lambda^k}{(\lambda+\mu)^k}\frac{\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^{n-k}} \\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

(c) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P[X+Y=n|Y=\ell]$ für alle n und ℓ.

Lösung:

Wir machen eine Fallunterscheidung:

- Für $n \notin \mathbb{N}_0$ ist $P[X+Y=n|Y=\ell]=0$.
- Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $\ell \notin \mathbb{N}_0$ ist $P[X+Y=n|Y=\ell]=0$.
- Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $\ell \in \mathbb{N}_0$ mit $\ell > n$ ist $P[X+Y=n|Y=\ell]=0$.
- Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $\ell \in \mathbb{N}_0$ mit $\ell \in \{0,1,\dots,n\}$ ist

$$
\begin{aligned}
P[X+Y=n|Y=\ell] &= \frac{P[X+Y=n, Y=\ell]}{P[Y=\ell]} \\
&= \frac{P[X=n-\ell, Y=\ell]}{P[Y=\ell]} \\
&= \frac{P[X=n-\ell]P[Y=\ell]}{P[Y=\ell]} \\
&= e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-\ell}}{(n-\ell)!},
\end{aligned}
$$

wobei die dritte Gleichheit die Unabhängigkeit von X und Y benutzt.

3. Bedingte Dichten **[10 Punkte]**

Sei (X, Y) eine $\mathbb{R}^2$-wertige Zufallsvariable mit Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} Kye^{-2y(x+1)}, & \text{falls } x, y > 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $K > 0$ ist.

(a) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie K so, dass $f_{X,Y}$ zu einer Dichte wird.
Lösung:

Es muss gelten, dass

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy \\ &= K\int_0^{\infty} ye^{-2y}\int_0^{\infty} e^{-2yx}dxdy \\ &= K\int_0^{\infty} ye^{-2y}\left(-\frac{1}{2y}\right)\left[e^{-2yx}\right]_{x=0}^{x=\infty} dy \\ &= \frac{K}{2}\int_0^{\infty} e^{-2y}dy \\ &= \frac{K}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left[e^{-2y}\right]_{y=0}^{y=\infty} \\ &= \frac{K}{4}. \end{aligned}$$

Es muss also $K = 4$ gelten, damit $f_{X,Y}$ eine Dichte ist.

(b) **[6 Punkte]** Bestimmen Sie die Randdichten f_X und f_Y. Sind X und Y unabhängig?
Lösung:

(Es ist gestattet hier mit K zu rechnen.)
Die Randdichte f_X von X ist gegeben durch

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy.$$

Also ist $f_X(x) = 0$ für $x \le 0$ und mit partieller Integration

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^{\infty} Kye^{-2y(x+1)}dy \\ &= K\left(\left[-\frac{y}{2(x+1)}e^{-2y(x+1)}\right]_{y=0}^{y=\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{2(x+1)}e^{-2y(x+1)}dy\right) \\ &= \frac{K}{2}\frac{1}{x+1}\int_0^{\infty} e^{-2y(x+1)}dy \end{aligned}$$

$$= \frac{K}{2}\frac{1}{x+1}\left[-\frac{1}{2(x+1)}e^{-2y(x+1)}\right]_{y=0}^{y=\infty}$$
$$= \frac{K}{4}\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

für $x > 0$. Somit ist

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{K}{4}\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

<u>*Alternativ:*</u> Es gilt

$$f_X(x) = \int_0^\infty Kye^{-2y(x+1)}dy = \int_0^\infty y2(x+1)e^{-2(x+1)y}dy\frac{K}{2(x+1)}.$$

Aber das letzte Integral ist gerade der Erwartungswert einer $Exp(2(x+1))$-verteilten Zufallsvariablen, also $\frac{1}{2(x+1)}$, und damit ist $f_X(x) = \frac{K}{4}\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$ für $x > 0$.
Analog erhalten wir für die Randdichte von Y, dass $f_Y(y) = 0$ für $y \leq 0$ und

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^\infty f_{X,Y}(x,y)dx$$
$$= Kye^{-2y}\int_0^\infty e^{-2yx}dx$$
$$= Kye^{-2y}\left[-\frac{1}{2y}e^{-2yx}\right]_{x=0}^{x=\infty}$$
$$= \frac{K}{2}e^{-2y}$$

für $y > 0$. Somit erhalten wir

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{K}{2}e^{-2y} = 2e^{-2y}, & \text{falls } y > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offensichtlich gilt

$$f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$$

für manche $x, y > 0$. Somit sind X und Y nicht unabhängig.

(c) [**2 Punkte**] Geben Sie die allgemeine Formel für die bedingte Dichte $f_{X|Y}$ von X gegeben Y an, und berechnen Sie $f_{X|Y}$ für die Dichte $f_{X,Y}$ aus (a).
(*Hinweis:* Falls Sie (b) nicht gelöst haben, so nehmen Sie stattdessen $Y \sim Exp(4)$ an.)

Lösung:

(Es ist gestattet hier mit K zu rechnen.)
Nach Definition ist

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)},$$

falls $f_Y(y) > 0$.
Da $f_Y(y) > 0$ genau dann, wenn $y > 0$, folgt, dass

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{K}{2} y e^{-2yx} = 2ye^{-2yx}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für $y > 0$.
(Rechnet man mit $Y \sim Exp(4)$, so wird analog zuerst $f_Y(y) = 4e^{-4y}$ für $y > 0$ und dann

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{K}{4} y e^{-2y(x-1)} = ye^{-2y(x-1)}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für $y > 0$.)

4. CO_2-Entlastung aufgrund von Flugstopps **[10 Punkte]**

Am Flughafen Zürich starten und landen täglich um die 750 Flugzeuge, welche ca. 80'000 Menschen von den Ferien abholen oder in die Ferien bringen. Aufgrund der Corona-Pandemie ist die tägliche Anzahl der Passagiere am Flughafen Zürich im April 2020 auf ca. 800 gesunken, was zu einem erheblichen Flugverkehrseinbruch geführt hat. Forscher der Universität Leipzig haben herausgefunden, dass sich durch den Rückgang des Flugverkehrs ca. 9% weniger Cirruswolken bilden konnten. Da Cirruswolken dafür bekannt sind, dass sie die Wärme in der Erdatmosphäre einschliessen, vermuten wir, dass die tägliche Höchsttemperatur im April 2020 tiefer war als im Vorjahr. Die Höchsttemperaturen in den ersten 9 Tagen im April 2020 waren

Tag i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatur x_i	15	18.4	20.9	16	17	23	21.1	21	15

Nehmen Sie an, dass die Höchsttemperaturen Realisierungen von unabhängigen und je $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen sind, wobei μ und $\sigma^2 > 0$ unbekannt sind. Im April 2019 lag die durchschnittliche Höchsttemperatur bei 22 Grad. Wir möchten auf dem 5%-Niveau testen, ob durch den Flugstopp im April 2020 die erwartete tägliche Höchsttemperatur im Vergleich zum Wert vom Vorjahr gesunken ist.

(a) **[7 Punkte]** Führen Sie einen geeigneten Test durch. Geben Sie dazu

i. das Modell,
ii. die Hypothese und Alternative,
iii. die Teststatistik,
iv. die Verteilung der Teststatistik unter der Hypothese,
v. den Verwerfungsbereich,
vi. den beobachteten Wert der Teststatistik, sowie
vii. den Testentscheid an.

Kennzahlen: $\overline{x}_9 = 18.6$, $s_9 = 3.0$, $s_9^2 = 9.0$.

Lösung:

i. Sei $X_1, \ldots, X_9$ die Stichprobe, welche die Daten $x_1, \ldots, x_9$ realisiert. Nach der Aufgabenstellung sind $X_1, \ldots, X_9$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ unter P_ϑ, wobei $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$ ein unbekannter Parameter ist.

ii. Es ist naheliegend, als Hypothese und Alternative

$$H_0 : \mu = \mu_0 := 22 \quad \text{und} \quad H_A : \mu < \mu_0$$

zu wählen.

iii. Da μ und σ^2 unbekannt sind, ist es naheliegend, einen t-Test durchzuführen. Als Teststatistik wählen wir also

$$T = \frac{\overline{X}_9 - \mu_0}{S_9/\sqrt{9}}.$$

wobei $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ und $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$.

iv. Unter H_0 folgt T einer t-Verteilung mit 8 Freiheitsgraden.

v. Nach der Alternative hat der kritische Bereich die Form $K_< = (-\infty, c_<)$ für ein zu bestimmendes $c_<$. Für $\alpha = 0.05$ wählen wir $c_<$ so, dass

$$\alpha = P_{H_0}[T < c_<].$$

Also ist $c_< = t_{n-1,\alpha} = -t_{n-1,1-\alpha} = -t_{8,0.95} = -1.860$.

vi. Der beobachtete Wert der Teststatistik ist

$$T(\omega) = t(x_1, \ldots, x_9) = \frac{18.6 - 22}{3/3} = -3.4.$$

vii. Wegen $T(\omega) \in K_<$ verwerfen wir somit die Hypothese und nehmen die Alternative an. Die Daten sprechen also tatsächlich dafür, dass die durchschnittliche Höchsttemperatur gesunken ist.

(b) **[3 Punkte]** Bestimmen Sie mit den vorhandenen Tabellen eine möglichst scharfe obere Grenze für den realisierten p-Wert.

Lösung:

Der realisierte p-Wert ist

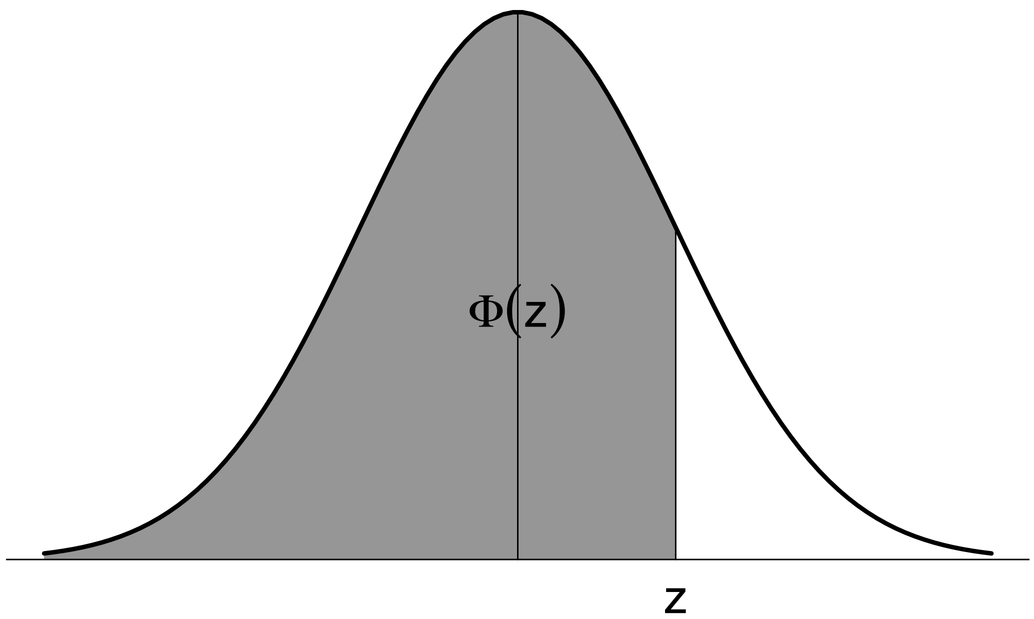
$$\text{p-Wert}(\omega) = P_{H_0}[T < t_0]\big|_{t_0=T(\omega)} = P_{H_0}[T < -3.4] = 1 - P_{H_0}[T < 3.4].$$

Aus den vorhandenen Tabellen folgt wegen $t_{8,0.995} = 3.355 < 3.4$, dass

$$0.995 \le P_{H_0}[T < 3.4] \le 1.$$

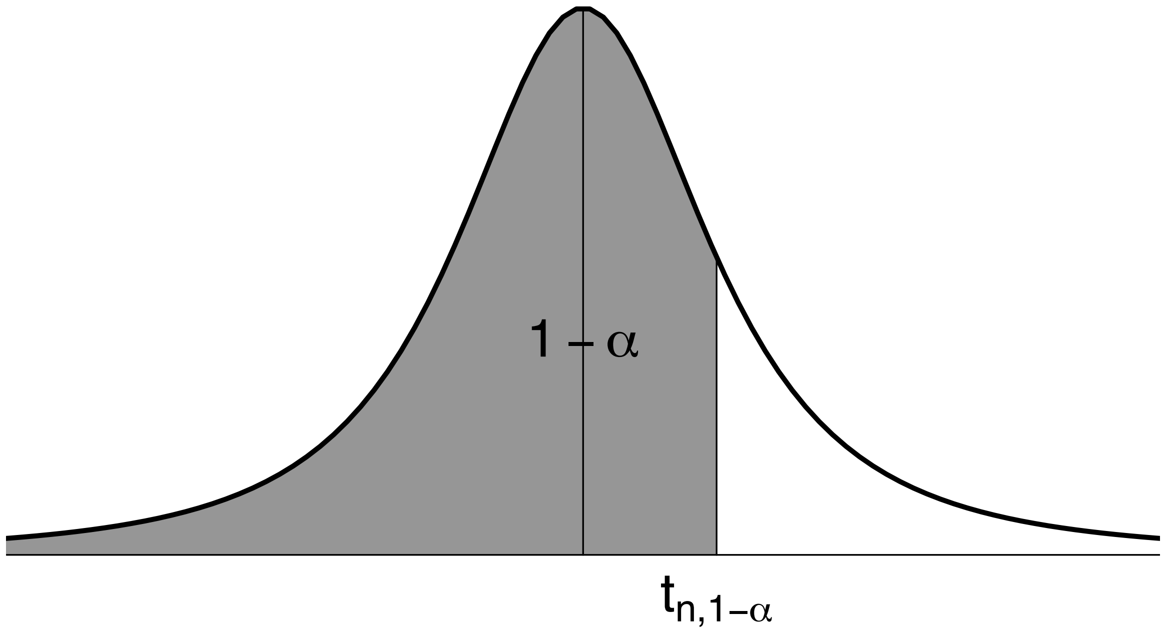
Also gilt

$$0 \le \text{p-Wert}(\omega) \le 0.005.$$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Tabelle der Standard-Normalverteilungsfunktion $\Phi(z) = P[Z \leq z]$ mit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.


1 – α
tn,1–α

df	$t_{0.60}$	$t_{0.70}$	$t_{0.80}$	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
31	0.255	0.530	0.853	1.309	1.696	2.040	2.452	2.744
32	0.255	0.530	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
33	0.255	0.530	0.853	1.308	1.693	2.035	2.445	2.733
34	0.255	0.529	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
35	0.255	0.529	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Ausgewählte Quantile $t_{n,1-\alpha}$ der t-Verteilung; in der Tabelle ist $n = df$.
Für $df = \infty$ erhält man die Quantile $z_{1-\alpha}$ der Standard-Normalverteilung.