Musterlösung

1. a) 1 b) 1 c) 2 d) 2 e) 1 f) 3 g) 3 h) 3 i) 1 j) 1

2. **a)** Damit f_X eine Wahrscheinlichkeitsdichte darstellt muss gelten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx \overset{!}{=} 1.$$

Für ein vorgegebenes η muss also

$$1 \overset{!}{=} \int_0^{\infty} ce^{-\eta x}dx = \frac{-c}{\eta}e^{-\eta x}\Big|_0^{\infty} = \frac{c}{\eta}$$

somit $c = \eta$, d.h. X hat eine Exponentialverteilung mit Parameter $\eta > 0$.

b) Wir haben $(X_i)_{1\leq i\leq 100}$ welche unabhängig und identisch $Exp(\eta)$, $\eta = 1/5$, verteilt sind. Definiere $S_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$. Gesucht ist die (approximative) Wahrscheinlichkeit $P[S_{100} > 550]$. Es gilt $E[S_{100}] = 100E[X_1] = 500$ und $\sqrt{\mathrm{Var}[S_{100}]} = \sqrt{100\mathrm{Var}[X_1]} = 50$ wegen der Unabhängigkeit der X_i. Mit dem Zentralen Grenzwertsatz folgt

$$\begin{aligned} P[S_{100} > 550] &= P\left[\frac{S_{100} - E[S_{100}]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S_{100}]}} > \frac{550 - E[S_{100}]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S_{100}]}}\right] = P\left[\frac{S_{100} - 500}{50} > \frac{550 - 500}{50}\right] \\ &\approx 1 - \Phi(1) \overset{*}{=} 1 - 0.8413 = 0.1587. \end{aligned}$$

* durch Ablesen aus der Tabelle der Normalverteilung.

c) Sei also $L = \min\{k \geq 1 | X_k \text{ ist ein Monsuntag}\}$, $L \sim Geom(p)$. Der Erfolgsparameter p ist gegeben durch $p = P[X > 10]$ wobei $X \sim Exp(\eta)$ mit $\eta = 1/5$. Für $X \sim Exp(\eta)$ ist $F_X(x) = P[X \leq x] = 1 - e^{-\eta x}$ und damit

$$p = P[X > 10] = e^{-10\eta} = e^{-2} \approx 0.135.$$

d) Zur Erinnerung: Es gilt $f(l;p) = P[L = l] = p(1-p)^{l-1}$ für eine geometrisch-verteilte Zufallsvariable $L \sim Geom(p)$. Allgemein haben wir somit für n beobachtete Werte $l_1, \ldots, l_n$ die folgende Likelihood-Funktion:

$$L(l_1, \ldots, l_n; p) = \prod_{i=1}^{n} f(l_i; p) = \prod_{i=1}^{n} p(1-p)^{l_i - 1}.$$

Die Log-Likelihood-Funktion ist somit gegeben durch

$$\ell(l_1, \ldots, l_n; p) = n \log p + \sum_{i=1}^{n}(l_i - 1)\log(1-p).$$

Es folgt: $\frac{\partial}{\partial p}\ell(l_1,\ldots,l_n;p)=0 \Longleftrightarrow n/p+\sum_{i=1}^n(l_i-1)\frac{-1}{1-p}=0$. Auflösen nach p (und Ersetzen der Realisierungen l_i durch die zugehörigen Zufallsvariablen L_i) liefert den Maximum-Likelihood-Schätzer für p durch

$$p_{MLE}=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n L_i\right)^{-1}.$$

Für den Schätzwert erhalten wir durch Einsetzen der insgesamt $n=6$ Werte aus der Tabelle $\widehat{p}_{MLE}=\left(\frac{1}{6}\sum_{i=1}^6 l_i\right)^{-1}=\frac{6}{48}=\frac{1}{8}=0.125$.

3. **a)** Aus der Vorlesung sind die folgenden Erwartungswerte bekannt:

$$\begin{aligned} E\big[Y_1\big]=E\big[Y_2\big] &= \frac{2}{3}\\ E\big[X_1\big]=E\big[X_2\big] &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Wegen der Linearität des Erwartungswertes und der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen folgt

$$\begin{aligned} E[T] &= E\big[Y_1X_1+Y_2X_2\big]\\ &= E\big[Y_1X_1\big]+E\big[Y_2X_2\big]\\ &= E\big[Y_1\big]E\big[X_1\big]+E\big[Y_2\big]E\big[X_2\big]\\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=2. \end{aligned}$$

b) Einsetzen in die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit und die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen Y_1, Y_2 und X_1 ergibt

$$\begin{aligned} P\big[Y_1=1,Y_2=0\big|T\le 3\big] &= \frac{P[Y_1=1,Y_2=0,T\le 3]}{P[T\le 3]}\\ &= \frac{P[Y_1=1,Y_2=0,X_1\le 3]}{P[T\le 3]}\\ &= \frac{P[Y_1=1]\cdot P[Y_2=0]\cdot P[X_1\le 3]}{P[T\le 3]}\\ &= \frac{\frac{2}{3}\cdot(1-\frac{2}{3})\cdot 1}{\frac{7}{9}}=\frac{2}{7}, \end{aligned}$$

da $P[X_1\le 3]=F_{X_1}(3)=\frac{1}{3}\cdot 3=1$ ist und $P[T\le 3]=\frac{7}{9}$ gemäss Aufgabenstellung.

c) Da Z eine stetig verteilte Zufallsvariable mit Dichte ist, gilt $F_Z(z)=P[Z\le z]=\int_{-\infty}^z f_Z(x)dx$. Zur Berechnung des Integrals unterscheiden wir die folgenden vier Fälle $z<0$, $0\le z<3$, $3\le z<6$ und $z\ge 6$. Für $x<0$ ist $f_Z(x)=0$ und demnach $F_Z(z)=0$ für $z<0$. Für $0\le z\le 3$ gilt

$$F_Z(z)=\int_0^z\frac{1}{9}xdx=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^z=\frac{1}{18}z^2.$$

Für $3<z\le 6$ berechnen wir das Integral in zwei Teilen

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_0^3\frac{1}{9}xdx+\int_3^z(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}x)dx\\ &= \frac{1}{18}x^2\Big|_0^3+\frac{2}{3}x\Big|_3^z-\frac{1}{18}x^2\Big|_3^z\\ &= \frac{1}{2}+\frac{2}{3}(z-3)-\frac{1}{18}z^2+\frac{1}{18}3^2\\ &= 1-\frac{1}{2}(\frac{1}{3}z-2)^2=-\frac{1}{18}z^2+\frac{2}{3}z-1. \end{aligned}$$

Für $z > 6$ ist $F_Z(z) = 1$. Somit erhalten wir

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } z < 0, \\ \frac{1}{18}z^2 & \text{für } 0 \leq z \leq 3, \\ 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{3} - 2\right)^2 & \text{für } 3 < z \leq 6, \\ 1 & \text{für } z > 6 \end{cases}$$

als Verteilungsfunktion von Z.

d) Um F_T zu berechnen, benutzen wir zunächst, dass wir die Menge $\{T \leq t\}$ in disjunkte Ereignisse zerlegen können, und erhalten so

$$\begin{aligned} P[T \leq t] &= P[Y_1 = 0, Y_2 = 0, T \leq t] + P[Y_1 = 1, Y_2 = 0, T \leq t] \\ &\quad + P[Y_1 = 0, Y_2 = 1, T \leq t] + P[Y_1 = 1, Y_2 = 1, T \leq t] \\ &= P[Y_1 = 0, Y_2 = 0] I_{\{t \geq 0\}} + P[Y_1 = 1, Y_2 = 0, X_1 \leq t] \\ &\quad + P[Y_1 = 0, Y_2 = 1, X_2 \leq t] + P[Y_1 = 1, Y_2 = 1, X_1 + X_2 \leq t]. \end{aligned}$$

Da Y_1, Y_2, X_1 und X_2 unabhängig sind und X_1 und X_2 identisch verteilt sind, folgt hieraus

$$\begin{aligned} P[T \leq t] &= P[Y_1 = 0] P[Y_2 = 0] I_{\{t \geq 0\}} + P[Y_1 = 1] P[Y_2 = 0] F_{X_1}(t) \\ &\quad + P[Y_1 = 0] P[Y_2 = 1] F_{X_2}(t) + P[Y_1 = 1] P[Y_2 = 1] F_Z(t) \\ &= \frac{1}{9} I_{\{t \geq 0\}} + \frac{4}{9} F_{X_1}(t) + \frac{4}{9} F_Z(t). \end{aligned}$$

Einsetzen der Formeln für die Verteilungsfunktionen ergibt

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ \frac{1}{9} + \frac{4}{9}\left(\frac{t}{3}\right) + \frac{2}{9}\left(\frac{t}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{27}t + \frac{2}{81}t^2 & \text{für } 0 \leq t \leq 3, \\ 1 - \frac{2}{9}\left(\frac{t}{3} - 2\right)^2 = -\frac{2}{81}t^2 + \frac{8}{27}t + \frac{1}{9} & \text{für } 3 < t \leq 6, \\ 1 & \text{für } 6 < t. \end{cases}$$

e) Da $Z = X_1 + X_2$ ist und X_1 und X_2 unabhängig und auf dem Intervall $[0, 3]$ gleichverteilt sind, ist die Dichte f_Z von Z durch die Faltung

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(z - x) f_{X_2}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{3} I_{[0,3]}(z - x) \frac{1}{3} I_{[0,3]}(x) dx \tag{1}$$

gegeben. Damit die zweite Indikatorfunktion ungleich Null ist, muss $x \in [0, 3]$ sein. Die erste Indikatorfunktion ist ungleich Null, falls $z - x \in [0, 3]$ ist. Für $z \in [0, 3]$ folgt aus der Bedingung $z - x \geq 0$, dass das Produkt der beiden Indikatorfunktionen ungleich Null ist, falls $z \geq x$ ist. Die Bedingung $z - x \leq 3$ ist hierbei für $x \in [0, 3]$ automatisch erfüllt. Somit erhalten wir

$$f_Z(z) = \int_0^z \frac{1}{9} dx = \frac{1}{9} z \qquad \text{für } z \in [0, 3]. \tag{2}$$

Für $z \in (3, 6]$ ist das Produkt der beiden Indikatorfunktionen in (1) ungleich Null, falls $z - 3 \leq x$ ist. Dies folgt aus der Bedingung, dass $z - x \leq 3$ ist. Die Bedingung $z - x \geq 0$ ist hierbei für $x \in [0, 3]$ automatisch erfüllt. Dies ergibt

$$f_Z(z) = \int_{z-3}^3 \frac{1}{9} dx = \frac{3}{9} - \frac{z - 3}{9} = \frac{2}{3} - \frac{z}{9} \qquad \text{für } z \in (3, 6]. \tag{3}$$

Da das Produkt der Indikatorfunktionen in (1) für alle anderen Werte von z und x gleich Null ist, erhalten wir aus (2) und (3) die Dichte f_Z als

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{9}z & \text{für } 0 \leq z \leq 3, \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{9}z & \text{für } 3 < z \leq 6, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

4. **a)** Unabhängigkeit der X_j, $j \in \{1, \dots, 10\}$.

b) (i) Weil $X_j = X_{j+1}$ gilt, nimmt $X_j + X_{j+1}$ den Wert 0 mit Wahrscheinlichkeit $2/5$ und den Wert 2 mit Wahrscheinlichkeit $3/5$ an. Da X_j, j ungerade, unabhängig sind, ist somit $\frac{1}{2}S$ binomialverteilt mit Parameter $n = 5$ und $p = 3/5$. Also gilt $P[S = 2k] = \binom{5}{k}\frac{3^k 2^{5-k}}{5^5}$ für $k \in \{0, \dots, 5\}$ und $P[S = j] = 0$ für $j \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$.
(ii) Gesucht ist $P[X_1 = 1|S = 4]$. Aus dem Satz von Bayes folgt

$$\begin{aligned}
&P[X_1 = 1|S = 4] \\
&= \frac{P[X_1 = 1, S = 4]}{P[S = 4]} \\
&= \frac{P[X_1 = 1]P[\text{genau 2 der } X_j, j \in \{3, \dots, 10\}, \text{ sind gleich 1}]}{P[S = 4]} \\
&= \frac{P[X_1 = 1]P[\text{genau 1 der } X_j, j \in \{4, 6, 8, 10\}, \text{ ist gleich 1}]}{P[S = 4]},
\end{aligned}$$

weil X_j gleich X_{j+1} ist für ungerades j und unabhängig von den anderen X_k. Weiter ist

$$P\big[\text{genau 1 der } X_j, j \in \{4, 6, 8, 10\}, \text{ ist gleich 1}\big] = 4\frac{3}{5}\frac{2^3}{5^3}$$

und damit

$$P[X_1 = 1|S = 4] = \frac{4\frac{3}{5}\frac{3}{4}\frac{2^3}{5^4}}{\binom{5}{2}\frac{3^2 2^3}{5^5}} = 2/5.$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_1, X_2) &= E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2] \\
&= P[X_1 = 1, X_2 = 1] - P[X_1 = 1]P[X_2 = 1].
\end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
P[X_1 = 1, X_2 = 1] =& 1 - P[X_1 = 0, X_2 = 1] - P[X_1 = 1, X_2 = 0] \\
&- P[X_1 = 0, X_2 = 0] \\
=& 1 - P[X_1 = 0] - P[X_2 = 0] + P[X_1 = 0, X_2 = 0] \\
=& 1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

und deshalb

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_1, X_2) =& P[X_1 = 1, X_2 = 1] - P[X_1 = 1]P[X_2 = 1] \\
=& \frac{2}{5} - \frac{9}{25} = \frac{1}{25}.
\end{aligned}$$

d) (i) Ja, $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$. Weil $Y = X_1 + X_2$ binomialverteilt ist mit Parametern $n = 2$ und $p = 3/5$, gilt $\mathrm{Var}[X_1 + X_2] = 2\frac{2}{5}\frac{3}{5} = \frac{12}{25}$. Zudem ist $\mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2] = 2\frac{2}{5}\frac{3}{5} = \frac{12}{25}$, so dass die Aussage aus der Formel $\mathrm{Var}[X_1 + X_2] = \mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2] + 2\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ folgt.
(ii) Ja, X_1 und X_2 sind unabhängig. (Beachte, dass dies nicht direkt aus $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$ folgt.) Wir haben

$$\begin{aligned}
P[X_1 = 1, X_2 = 1] = P[Y = 2] = \frac{3^2}{5^2} = P[X_1 = 1]P[X_2 = 1], \\
P[X_1 = 0, X_2 = 0] = P[Y = 0] = \frac{2^2}{5^2} = P[X_1 = 0]P[X_2 = 0].
\end{aligned}$$

Also bleibt zu zeigen,

$$P[X_1 = 1, X_2 = 0] = P[X_1 = 1]P[X_2 = 0] \quad \text{und} \quad P[X_1 = 0, X_2 = 1] = P[X_1 = 0]P[X_2 = 1].$$

Einerseits gilt

$$P[X_1 = 1, X_2 = 0] + P[X_1 = 0, X_2 = 1] = P[Y = 1] = 2\frac{2}{5}\frac{3}{5} = \frac{12}{25},$$

andererseits ist

$$\begin{aligned} P[X_1 = 1, X_2 = 0] &= P[X_1 = 1] - P[X_1 = 1, X_2 = 1] \\ &= P[X_2 = 1] - P[X_1 = 1, X_2 = 1] \\ &= P[X_1 = 0, X_2 = 1], \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} P[X_1 = 1, X_2 = 0] &= P[X_1 = 0, X_2 = 1] \\ &= \frac{6}{25} = \frac{3}{5}\frac{2}{5} \\ &= P[X_1 = 1]P[X_2 = 0] \\ &= P[X_1 = 0]P[X_2 = 1]. \end{aligned}$$