Basisprüfung D-INFK

1. (10 Punkte)

Bei den folgenden 10 Fragen gibt es pro richtig beantwortete Frage 1 Punkt. Pro falsche Antwort gibt es 1/2 Punkt Abzug. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte.

a) Seien A und B zwei Ereignisse mit $0 < P[A] \leq 1/2$ und $0 < P[B] \leq 1/2$. A und B sind unabhängig, falls

1) $P[A|B] = P[A]$ 2) $P[A|B] = 0$ 3) $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$

b) Der Schweizer Bundesrat besteht aus 7 Personen, davon 3 Frauen. Nehmen Sie an, dass er zufällig 3 seiner Mitglieder für eine Kommission bestimmt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dafür genau 2 Frauen und ein Mann bestimmt werden?

1) 12/35 2) 4/35 3) 18/343

c) In einer Urne befinden sich 100 schwarze und 20 rote Kugeln. Es wird jeweils zufällig eine Kugel gezogen und danach wieder zurückgelegt. Wir bezeichnen mit X die Anzahl der Ziehungen, bis eine rote Kugel gezogen wird. Es gilt dann

1) X ist binomialverteilt,
2) X ist geometrisch verteilt,
3) die Verteilung von X ist durch diese Angaben nicht eindeutig bestimmt.

d) Sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $E[X] = 2$ und Varianz $\mathrm{Var}[X] = 3$. Wie gross ist die Varianz von $Y = 2X + 1$?

1) 13 2) 12 3) 6

e) Welche der folgenden Aussagen ist für eine beliebige Zufallsvariable X mit Erwartungswert $E[X] = 0$ und Varianz $\mathrm{Var}[X] = b > 0$ richtig?

1) $P[|X| \geq b] \leq \frac{1}{b}$ 2) $P[|X| \geq b] \leq \frac{1}{b^2}$ 3) $P[|X| \geq b] \leq 1 - \frac{1}{b^2}$

f) Ein fairer Würfel wird 900mal geworfen. Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Würfe mit Augenzahl 1 oder 2. Wie gross ist die Varianz von X?

1) 600 2) 250 3) 200

g) Seien A und B zwei Ereignisse mit bedingter Wahrscheinlichkeit $P[A|B] = 1/3$. Wie gross ist dann $P[A|B^c]$, wobei B^c das Komplement von B bezeichnet?

1) 2/3 2) 1/3 3) $P[A|B^c]$ ist durch diese Angaben nicht eindeutig bestimmt.

h) Die Zufallsvariable X habe eine Verteilungsfunktion F_X mit zugehöriger Dichte f_X. Wir definieren $Y = \exp(X)$. Dann gilt für die Dichte f_Y von Y

1) $f_Y(y) = \log\big(f_X(y)\big), y > 0$ 2) $f_Y(y) = f_X(\log y), y > 0$ 3) $f_Y(y) = \frac{1}{y} f_X(\log y), y > 0$

i) Seien X_1 und X_2 Zufallsvariablen. Die gemeinsame Verteilungsfunktion von (X_1, X_2) ist eindeutig durch die Randverteilungen F_{X_1} und F_{X_2} von X_1 und X_2 bestimmt, falls

1) X_1 und X_2 unabhängig sind,
2) X_1 und X_2 normalverteilt sind,
3) X_1 und X_2 identisch verteilt sind (d.h. $F_{X_1} = F_{X_2}$).

j) Wir betrachten zwei Maschinen A und B mit Lebensdauern X_A und X_B. Weiter definieren wir Y als die Zeit, zu der die erste der beiden Maschinen ausfällt $\big(Y = \min(X_A, X_B)\big)$, und Z als die erste Zeit, zu der beide Maschinen defekt sind $\big(Z = \max(X_A, X_B)\big)$. Die Erwartungswerte $E[X_A] = 3$, $E[X_B] = 6$ und $E[Y] = 2$ sind bekannt. Es gilt dann

1) $E[Z] = 7$ 2) $E[Z] = 6$ 3) $E[Z]$ ist durch diese Angaben nicht eindeutig bestimmt.

2. (10 Punkte)

Nehmen Sie an, die Firma Meteo-Tropical arbeite mit folgendem Modell für die Niederschlagsmenge in den Tropen. Die Zufallsvariable X beschreibe die tägliche Niederschlagsmenge in mm, und die zugehörige Dichte sei gegeben durch

$$f_X(x) = \begin{cases} ce^{-\eta x} & , \quad x \geq 0, \\ 0 & , \quad \text{sonst}, \end{cases}$$

für $c, \eta > 0$.

a) Wie muss c für ein fest vorgegebenes η gewählt werden, damit f_X eine Wahrscheinlichkeitsdichte darstellt?

Es bezeichne X_i die Niederschlagsmenge in mm am Tag $i \geq 1$. Wir nehmen an, dass die Niederschlagsmengen an verschiedenen Tagen unabhängig voneinander sind und die gleiche Verteilung haben wie X.

b) Wir betrachten nun eine Zeitperiode von $n = 100$ Tagen. Für diese Periode sei aufgrund von Erfahrungswerten $c = \eta = 1/5$ bekannt, d.h. $E[X_1] = 5$ mm und $\sqrt{\mathrm{Var}[X_1]} = 5$ mm. Berechnen Sie mittels einer geeigneten Approximation die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser 100-tägigen Periode insgesamt mehr als 550 mm Niederschlag fällt.

c) Wir reden von einem "Monsuntag", falls die Niederschlagsmenge an jenem Tag mehr als 10 mm beträgt. Es sei $L = \min\{k \geq 1 | X_k \text{ ist ein Monsuntag}\}$. Die Zufallsvariable L besitzt also eine geometrische Verteilung, d.h. $L \sim Geom(p)$. Welchen Wert hat p, falls wiederum $c = \eta = 1/5$ angenommen wird?

d) Im Allgemeinen sind die Werte von p (und η) unbekannt und müssen anhand von Daten geschätzt werden. Nehmen Sie an, dass L_i $(1 \leq i \leq 6)$ unabhängig und geometrisch verteilt sind mit Parameter p. Um p zu schätzen, werden an 6 verschiedenen Messstationen für L folgende Realisierungen $L_i(\omega) = l_i$ $(1 \leq i \leq 6)$ beobachtet.

Messstation	A	B	C	D	E	F
l_i	4	3	7	8	11	15

Schätzen Sie p mittels der Maximum-Likelihood-Methode. Geben Sie dazu sowohl den Schätzer p_{MLE} wie auch den Schätzwert $\widehat{p}_{MLE}$ an.

3. (15 Punkte)

Christoph fährt jeden Morgen mit dem Fahrrad zur Arbeit. Auf seinem Arbeitsweg kommt er an zwei Ampeln vorbei. An jeder der beiden Ampeln muss er unabhängig von der anderen mit der Wahrscheinlichkeit $2/3$ warten. Die Wartezeiten X_1 und X_2 (in Minuten) an den beiden Ampeln sind beide unabhängig voneinander auf dem Intervall $[0,3]$ gleichverteilt. Die Gesamtwartezeit wird mit der Zufallsvariablen T beschrieben. Somit gilt $T = Y_1X_1 + Y_2X_2$, wobei Y_1 und Y_2 unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit $p = 2/3$ sind und X_1, X_2, Y_1, Y_2 unabhängig sind.

a) Berechnen Sie $E[T]$.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Christoph nur an der ersten, jedoch nicht an der zweiten Ampel warten muss, gegeben, dass seine Gesamtwartezeit weniger als 3 Minuten beträgt. Verwenden Sie dabei ohne Beweis, dass $P[T \leq 3] = 7/9$.

Verwenden Sie zur Bearbeitung der nachfolgenden Teilaufgaben c) und d) (noch ohne Beweis), dass die Dichte der Summe Z der beiden Zufallsvariablen X_1 und X_2 durch

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{9}z & \text{für } 0 \leq z \leq 3, \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{9}z & \text{für } 3 < z \leq 6, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist.

c) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_Z der Zufallsvariablen Z.

d) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_T der Zufallsvariablen T.
(**Hinweis:** Sie dürfen die Formel für die Verteilungsfunktion einer auf dem Intervall $[0,3]$ gleichverteilten Zufallsvariablen ohne Beweis direkt aus Ihrer Zusammenfassung verwenden.)

e) Zeigen Sie, dass für die Dichte f_Z von $Z = X_1 + X_2$ folgendes gilt:

i) $f_Z(z) = \frac{1}{9}z$ für $0 \leq z \leq 3$,
ii) $f_Z(z) = \frac{2}{3} - \frac{1}{9}z$ für $3 < z \leq 6$.

4. (15 Punkte)

Wir betrachten 10 Personen, die je ein Darlehen von einer amerikanischen Bank in der Höhe von 100'000 $ erhalten haben. Jede dieser 10 Personen kann mit Wahrscheinlichkeit $3/5$ das Darlehen in einem Jahr zurückzahlen. Wir definieren Zufallsvariablen X_j, $j \in \{1, \dots, 10\}$, mit

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{falls Person } j \text{ ihr Darlehen in einem Jahr zurückzahlen kann,} \\ 0 & \text{falls Person } j \text{ ihr Darlehen in einem Jahr nicht vollständig zurückzahlen kann.} \end{cases}$$

Weiter definieren wir $S = \sum_{j=1}^{10} X_j$. Die folgenden Teilaufgaben a)–d) bauen nicht aufeinander auf und können daher in beliebiger Reihenfolge gelöst werden.

a) Unter welcher zusätzlichen Voraussetzung an X_j, $j \in \{1, \dots, 10\}$, ist S binomialverteilt mit Parametern $n = 10$ und $p = 3/5$?

b) Wir nehmen nun an, dass Person j und Person $j+1$ für ungerades j Ehepartner sind und deshalb gelte $X_j = X_{j+1}$, falls j ungerade ist. Die Zufallsvariablen X_j, j ungerade, seien unabhängig.

i) Bestimmen Sie $P[S = k]$ für jedes $k \in \{0, \dots, 10\}$.
(**Hinweis:** Überlegen Sie sich zuerst, wie die Zufallsvariable $\frac{1}{2}S$ verteilt ist.
Binomialkoeffizienten und Potenzen können im Resultat stehen gelassen werden.)

ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von $X_1 = 1$, wenn wir wissen, dass $S = 4$ ist.

c) Wir nehmen nun an, das Ereignis, dass sowohl Person 1 als auch Person 2 ihre Darlehen in einem Jahr nicht vollständig zurückzahlen können, habe eine Wahrscheinlichkeit von 1/5. Berechnen Sie die Kovarianz $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

d) Sei $Y = X_1 + X_2$ binomialverteilt mit Parametern $n = 2$ und $p = 3/5$.

i) Gilt dann für die Kovarianz $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$?

ii) Sind dann X_1 und X_2 unabhängig?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Viel Erfolg!

Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung

$$\Phi(a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\, dz, \qquad \text{tabelliert für } a = 0.00, \ldots, 3.99$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6408	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.998650	.998694	.998736	.998777	.998817	.998856	.998893	.998930	.998965	.998999
3.1	.999032	.999065	.999096	.999126	.999155	.999184	.999211	.999238	.999264	.999289
3.2	.999313	.999336	.999359	.999381	.999402	.999423	.999443	.999462	.999481	.999499
3.3	.999517	.999534	.999550	.999566	.999581	.999596	.999610	.999624	.999638	.999651
3.4	.999663	.999675	.999687	.999698	.999709	.999720	.999730	.999740	.999749	.999758
3.5	.999767	.999776	.999784	.999792	.999800	.999807	.999815	.999822	.999828	.999835
3.6	.999841	.999847	.999853	.999858	.999864	.999869	.999874	.999879	.999883	.999888
3.7	.999892	.999896	.999900	.999904	.999908	.999912	.999915	.999918	.999922	.999925
3.8	.999928	.999931	.999933	.999936	.999938	.999941	.999943	.999946	.999948	.999950
3.9	.999952	.999954	.999956	.999958	.999959	.999961	.999963	.999964	.999966	.999967