Aufgaben und Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

Betrachten Sie drei Urnen mit grünen und roten Kugeln. Urne A enthält 4 rote und 3 grüne Kugeln, Urne B enthält 2 rote und 1 grüne Kugeln, und Urne C enthält 1 rote und 2 grüne Kugeln.

1.MC1 [1 Punkt] Zwei Kugeln werden aus Urne A ohne Zurücklegen gezogen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide rot sind?

(A) 12/49
(B) 2/7
(C) 16/49
(D) 16/9

Lösung:

Denn die Kugeln werden ohne Zurücklegen gezogen, ist

$$\mathbb{P}[RR \mid A] = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \boxed{\frac{2}{7}}.$$

1.MC2 [2 Punkte] Die zwei Kugeln werden in Urne A zurückgelegt, und dann werden drei weitere Kugeln aus Urne A ohne Zurücklegen gezogen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass nicht alle gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben?

(A) 4/35
(B) 5/7
(C) 6/7
(D) 31/35

Lösung:

Es gilt

$$\mathbb{P}[RRR \mid A] = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{35}, \quad \mathbb{P}[GGG \mid A] = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{35},$$

und deshalb ist

$$\mathbb{P}[\text{„nicht alle die gleiche Farbe haben“}] = 1 - \frac{4}{35} - \frac{1}{35} = \boxed{\frac{6}{7}}.$$

1.MC3 [2 Punkte] Die drei Kugeln werden in Urne A zurückgelegt. Simone wählt zufällig (mit gleicher Wahrscheinlichkeit) eine der Urnen A, B, C aus und zieht daraus eine Kugel. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel rot ist?

(A) 11/21

(B) 4/7

(C) 13/21

(D) 2/3

Lösung:

Nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$\mathbb{P}[R] = \mathbb{P}[R \mid A]\,\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[R \mid B]\,\mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[R \mid C]\,\mathbb{P}[C] = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{11}{21}}.$$

1.MC4 [2 Punkte] Die Kugel, die Simone zog, war rot. Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass Urne C ausgewählt wurde?

(A) 7/33

(B) 7/39

(C) 3/11

(D) 3/13

Lösung:

Nach dem Satz von Bayes und 1.MC3 gilt

$$\mathbb{P}[C \mid R] = \frac{\mathbb{P}[R \mid C]\,\mathbb{P}[C]}{\mathbb{P}[R]} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{11}{21}} = \boxed{\frac{7}{33}}.$$

Aufgabe 2

2.MC1 [2 Punkte] Seien A, B zwei Ereignisse mit $\mathbb{P}[A] = 0.7$ und $\mathbb{P}[B] = 0.6$. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

(A) $\mathbb{P}[A \cup B] = 1$

(B) $\mathbb{P}[A \cap B] = 0.42$

(C) $\mathbb{P}[A \cup B] + \mathbb{P}[A \cap B] = 1.3$

(D) $\mathbb{P}[A \setminus B] = 0.1$

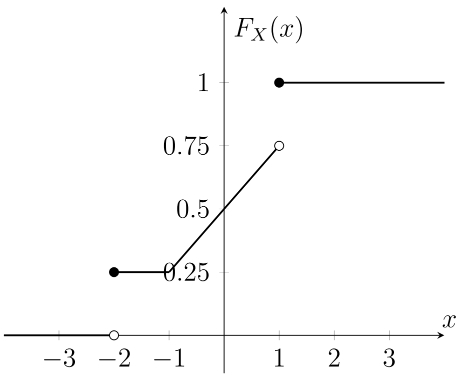
Lösung:

Es gilt

$$\mathbb{P}[A\cup B] = \mathbb{P}[A]+\mathbb{P}[(A\cup B)\setminus A] = \mathbb{P}[A]+\mathbb{P}[B\setminus A] = \mathbb{P}[A]+\mathbb{P}[B]-\mathbb{P}[A\cap B] = 1.3-\mathbb{P}[A\cap B],$$

und deshalb ist $\boxed{\mathbb{P}[A \cup B] + \mathbb{P}[A \cap B] = 1.3}$. Die Gleichung $\mathbb{P}[A \cup B] = 1$ gilt nicht, wenn $B \subseteq A$, $\mathbb{P}[A \cap B] = 0.42$ gilt nicht, wenn A und B nicht unabhängig sind, und $\mathbb{P}[A \setminus B] = 0.1$ gilt nicht, wenn $B \not\subseteq A$.

2.MC2 [2 Punkte] Wir betrachten die folgende Verteilungsfunktion F_X einer Zufallsvariablen X. Welches der folgenden Ereignisse hat eine Wahrscheinlichkeit von 1/2?



(A) $\{-2 < X \leq 1\}$

(B) $\{X < 1\}$

(C) $\{-2 \leq X < 0\}$

(D) $\{|X| = 2\}$

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[-2 < X \leq 1] &= 1 - 0.25 = 0.75,\\ \mathbb{P}[X < 1] &= 0.75,\\ \mathbb{P}[-2 \leq X < 0] &= 0.5 - 0 = 0.5,\\ \mathbb{P}[|X| = 2] &= \mathbb{P}[X = 2] + \mathbb{P}[X = -2] = 0 + 0.25 = 0.25,\end{aligned}$$

deshalb ist $\boxed{\{-2 \leq X < 0\}}$ das richtige Ereignis.

2.MC3 [1 Punkt] Was ist $\lim_{n\to\infty} e^{-4n} \sum_{k=2n}^{\infty} (4^k n^k / k!)$?

(A) 0
(B) 0.16
(C) 0.84
(D) 1

Lösung:

Es gilt

$$e^{-4n} \sum_{k=2n}^{\infty} \frac{4^k n^k}{k!} = \sum_{k=2n}^{\infty} \frac{(4n)^k e^{-4n}}{k!} = \mathbb{P}[X_n \geq 2n],$$

wobei $X_n \sim \mathrm{Poi}(4n)$. Nach der Chebyshev-Ungleichung gilt

$$\mathbb{P}[X_n < 2n] \leq \mathbb{P}[|X_n - 4n| > 2n] \leq \frac{\mathrm{Var}[X_n]}{(2n)^2} = \frac{4n}{4n^2} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

als $n \to \infty$. Deshalb haben wir $\mathbb{P}[X_n \leq 2n] \to 0$ und

$$\lim_{n\to\infty} e^{-4n} \sum_{k=2n}^{\infty} \frac{4^k n^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_n \geq 2n] = \boxed{1}.$$

2.MC4 [2 Punkte] Seien $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ und $Y \sim \mathrm{Exp}(\gamma)$ unabhängige Zufallsvariablen. Welchen Wert nimmt die gemeinsame Dichte von $(A, B) = (2X + Y, X + 2Y)$ bei $(3, 2)$ an?

(A) $f_{(A,B)}(3, 2) = 3\lambda\gamma \exp(-8\lambda - 7\gamma)$
(B) $f_{(A,B)}(3, 2) = \frac{\lambda\gamma}{3} \exp(-8\lambda - 7\gamma)$
(C) $f_{(A,B)}(3, 2) = 3\lambda\gamma \exp(-4\lambda/3 - \gamma/3)$
(D) $f_{(A,B)}(3, 2) = \frac{\lambda\gamma}{3} \exp(-4\lambda/3 - \gamma/3)$

Lösung:

Es gilt $\binom{A}{B} = M\binom{X}{Y}$, wobei $M = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ mit $\det M = 3$. Da $\binom{3}{2} = M\binom{4/3}{1/3}$ erhalten wir, dass

$$f_{(A,B)}(3,2) = \frac{1}{|\det M|} f_{X,Y}(4/3, 1/3) = \boxed{\frac{\lambda\gamma}{3}\exp(-4\lambda/3 - \gamma/3)}.$$

2.MC5 [1 Punkt] Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $X_n \sim \mathcal{U}[0, 1 + 1/n]$ und sei $X \sim \mathcal{U}[0,1]$. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

(A) $X_n \to X$ in Verteilung, aber $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit gilt im Allgemeinen nicht.

(B) $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit, aber $X_n \to X$ in Verteilung gilt im Allgemeinen nicht.

(C) $X_n \to X$ in Verteilung und in Wahrscheinlichkeit.

(D) X_n muss weder in Verteilung noch in Wahrscheinlichkeit gegen X konvergieren.

Lösung:

Es gilt $\boxed{X_n \to X \text{ in Verteilung}}$, denn

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{nx}{n+1} & 0 \le x < 1 + 1/n \\ 1, & x \ge 1 + 1/n \end{cases} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases} = F_X(x).$$

Andererseits $\boxed{\text{muss } X_n \text{ in Wahrscheinlichkeit nicht gegen } X \text{ convergieren}}$. Wenn zum Beispiel X_n und X unabhängig sind, gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[|X_n - X| < 1/3] &\ge \mathbb{P}[X_n \le 1/3, X \ge 2/3] \\ &= \mathbb{P}[X_n \le 1/3]\,\mathbb{P}[X \ge 2/3] = \frac{n}{3(n+1)}\frac{1}{3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{9} > 0. \end{aligned}$$

2.MC6 [2 Punkte] Betrachten Sie die Modellfamilie $(P_\theta)_{\theta\in(0,\infty)}$, wobei $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen unter P_θ sind mit $X_1 \sim \mathrm{Poi}(\theta)$. Welcher der folgenden ist der beste Schätzer für θ?

(A) $(X_1 + X_2)/2$

(B) $1/(X_1 + \cdots + X_n)$

(C) $\sqrt{(X_1^2 + \cdots + X_n^2)/n}$

(D) $(X_1 + \cdots + X_{n-2})/n$

Lösung:

Als $n \to \infty$ gilt es $(X_1 + X_2)/2 \to (X_1 + X_2)/2$ (d.h. der Limes bleibt zufällig), und nach dem Gesetzt der grossen Zahlen haben wir

$$
\begin{aligned}
(X_1 + \cdots + X_n)^{-1} &\approx \frac{1}{n\theta} \longrightarrow 0, \\
\sqrt{(X_1^2 + \cdots + X_n^2)/n} &\longrightarrow \sqrt{\mathbb{E}[X_1^2]} = \sqrt{\mathrm{Var}[X_1] + \mathbb{E}[X_1]^2} = \sqrt{\theta^2 + \theta}, \\
\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_{n-2}) &= \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) - \frac{X_{n-1} + X_{n-2}}{n} \longrightarrow \theta.
\end{aligned}
$$

Deshalb ist $\boxed{(X_1 + \cdots + X_{n-2})/n}$ der einzige konsistente Schätzer für θ.

Aufgabe 3

Seien X und Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = x + y \quad \text{für } x, y \in [0,1].$$

3.MC1 [2 Punkte] Was ist die Randdichte von X?

(A) $f_X(x) = x^2 + 1$ für $x \in [0,1]$
(B) $f_X(x) = x + 1/2$ für $x \in [0,1]$
(C) $f_X(x) = 2x$ für $x \in [0,1]$
(D) $f_X(x) = 3x^2$ für $x \in [0,1]$

Lösung:

$$f_X(x) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^1 (x+y)dy = \boxed{x + \frac{1}{2}}.$$

3.MC2 [2 Punkte] Was ist der Erwartungswert von X?

(A) $\mathbb{E}[X] = 5/12$
(B) $\mathbb{E}[X] = 1/2$
(C) $\mathbb{E}[X] = 7/12$
(D) $\mathbb{E}[X] = 3/4$

Lösung:

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 f_X(x)dx = \int_0^1 x\left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{7}{12}}.$$

3.MC3 [2 Punkte] Was ist die Kovarianz von X und Y?

(A) $\operatorname{Cov}(X,Y) = -1/12$
(B) $\operatorname{Cov}(X,Y) = -1/144$
(C) $\operatorname{Cov}(X,Y) = 23/144$
(D) $\operatorname{Cov}(X,Y) = 1/12$

Lösung:

Aus 3.MC2 wissen wir $\mathbb{E}[X] = \frac{7}{12}$ und aufgrund der Symmetrie gilt auch $\mathbb{E}[Y] = \frac{7}{12}$. Ausserdem haben wir

$$\mathbb{E}[XY] = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)dxdy = \int_0^1 \left(\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2}\right)dy = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3},$$

sodass

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{3} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{48}{144} - \frac{49}{144} = \boxed{-\frac{1}{144}}.$$

3.MC4 [2 Punkte] Welcher der folgenden Werte ist am grössten?

(A) $f_{X|Y}(1 \mid 1)$

(B) $f_{X|Y}(1 \mid 1/2)$

(C) $f_{X|Y}(1/2 \mid 1)$

(D) $f_{X|Y}(1/2 \mid 0)$

Lösung:

Aus 3.MC1 und aufgrund der Symmetrie ist $f_Y(y) = f_X(y) = y + 1/2$ für $y \in [0,1]$. Daraus folgt, dass $f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{x+y}{y+1/2}$ für $x, y \in [0,1]$ und

$$f_{X|Y}(1 \mid 1) = \frac{1+1}{1+1/2} = \frac{4}{3}, \qquad f_{X|Y}(1 \mid 1/2) = \frac{1+1/2}{1/2+1/2} = \frac{3}{2},$$
$$f_{X|Y}(1/2 \mid 1) = \frac{1/2+1}{1+1/2} = 1, \qquad f_{X|Y}(1/2 \mid 0) = \frac{1/2+0}{0+1/2} = 1.$$

Daher ist $\boxed{f_{X|Y}(1 \mid 1/2)}$ am grössten.

Aufgabe 4

Die Go-Weltmeisterin wurde zu einem Best-of-6-Match herausgefordert. Wenn die Herausforderin gewinnt, wird sie die neue Weltmeisterin. Die aktuelle Weltmeisterin gewinnt jedes Go-Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von $2/3$ und die Herausforderin mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/3$. Sie können davon ausgehen, dass die Ergebnisse der Spiele unabhängig sind. Eine der Spielerinnen gewinnt das Best-of-6-Match, wenn sie mindestens 4 Spielen gewinnt.

4.A1 [2 Punkte] Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Herausforderin das Best-of-6-Match gewinnt?

Lösung:

Die Verteilung der Anzahl der von der Herausforderin gewonnenen Spiele ist $\mathrm{Bin}(6, 1/3)$ und somit

$$\mathbb{P}[\text{„Die Herausforderin gewinnt das Best-of-6-Match“}] = \frac{1}{3^6} + 6 \times \frac{2}{3^6} + 15 \times \frac{4}{3^6} = \boxed{\frac{73}{729}}.$$

Falls das Best-of-6-Match unentschieden endet, spielen die Herausforderin und die Weltmeisterin ein weiteres Best-of-2-Match in einem schnelleren Zeitformat. In diesem Format gewinnt die Weltmeisterin jedes Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von $3/5$ und die Herausforderin mit einer Wahrscheinlichkeit von $2/5$. Wenn auch dieses Best-of-2-Match unentschieden endet, spielen sie ein weiteres Best-of-2-Match im gleichen Format usw., bis einer der Spieler ein Best-of-2-Match gewinnt.

4.A2 [2 Punkte] Nehmen Sie an, dass ein Best-of-2-Match gespielt wurde. Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Herausforderin es gewann, wenn wir wissen, dass es nicht unentschieden endete?

Lösung:

Seien $W =$ „Die Weltmeisterin gewinnt das Match“ und $H =$ „Die Herausforderin gewinnt“. Es gilt $\mathbb{P}[W] = (3/5)^2 = 9/25$ und $\mathbb{P}[H] = (2/5)^2 = 4/25$ und somit

$$\mathbb{P}[H \mid W \cup H] = \frac{4/25}{13/25} = \boxed{\frac{4}{13}}.$$

4.A3 [2 Punkte] Was ist für $n \geq 1$ die unbedingte Wahrscheinlichkeit, dass genau n Best-of-2-Matches gespielt werden, bis eine Gewinnerin feststeht?

Lösung:

Sei N die Anzahl der Best-of-2-Matches. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Best-of-6-Match unentschieden ist, ist gleich

$$20 \times \frac{8}{3^6} = \frac{160}{729}.$$

Andererseits ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Best-of-2-Match unentschieden ist, gleich $1 - 9/25 - 4/25 = 12/25$. Für $n \geq 1$ stellen wir fest, dass $N = n$ genau dann gilt, wenn die Best-of-6-Match und die ersten $n-1$ Best-of-2-Matches unentschieden sind und das n-te Match eine Gewinnerin hat. Da die Ergebnisse der Spiele unabhängig sind, erhalten wir somit

$$\mathbb{P}[N = n] = \frac{160}{729} \times \frac{13}{25} \times \left(\frac{12}{25}\right)^{n-1}.$$

4.A4 [2 Punkte] Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Herausforderin den Meistertitel gewinnt?

Lösung:

Sei G = „Die Herausforderin gewinnt den Meistertitel". Wir haben bereits in 4.A1 gezeigt, dass $\mathbb{P}[G \cap \{N = 0\}] = \frac{73}{729}$. Da die Ergebnisse der Spiele unabhängig sind, folgt aus 4.A2, dass $\mathbb{P}[G \mid \{N = n\}] = 4/13$ für $n \geq 1$. Also nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[G] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[G \cap \{N = n\}] &= \mathbb{P}[G \cap \{N = 0\}] + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[G \mid \{N = n\}]\mathbb{P}[N = n] \\
&= \frac{73}{729} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{13} \times \frac{160}{729} \times \frac{13}{25} \times \left(\frac{12}{25}\right)^{n-1} \\
&= \frac{73}{729} + \frac{4}{13} \times \frac{160}{729} \times \frac{13}{25} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{12}{25}\right)^{n-1} \\
&= \frac{73}{729} + \frac{4}{13} \times \frac{160}{729} \\
&= \frac{1589}{9477}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Amanda plant, ihre Ersparnisse anzulegen. Sie hat zwei Aktien A und B identifiziert, an denen sie interessiert ist. Beide Aktien haben heute den Wert CHF 1. Basierend auf ihrer Analyse können die Preise der Aktien A und B in einem Jahr durch CHF $(1+X, 1+Y)$ modelliert werden, wobei (X,Y) eine 2-dimensionale Normalverteilung hat mit $X \sim \mathcal{N}(0.1, 0.2^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(0.12, 0.4^2)$ und $\mathrm{Cov}[X,Y] = 0.064 = 8/125$.

5.A1 [2 Punkte] Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Aktie A in einem Jahr wertvoller ist als heute?

Lösung:

Da es gilt $\frac{X-0.1}{0.2} \sim \mathcal{N}(0,1)$, erhalten wir

$$\mathbb{P}[1+X \geq 1] = \mathbb{P}[X \geq 0] = \mathbb{P}\left[\frac{X-0.1}{0.2} \leq \frac{-0.1}{0.2}\right] = 1 - \Phi(-0.5) = \Phi(0.5) \approx \boxed{0.69}.$$

5.A2 [2 Punkte] Berechnen Sie $\mathrm{Cov}[X, Y-aX]$ für $a \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie den Wert von $\hat{a} \in \mathbb{R}$, sodass X und $\hat{Y} := Y - \hat{a}X$ unabhängig sind.

Lösung:

$$\mathrm{Cov}[X, Y-aX] = \mathrm{Cov}[X,Y] - a\mathrm{Var}[X] = \boxed{0.064 - 0.04a}.$$

Somit gilt $\mathrm{Cov}[X, Y-aX] = 0$ genau dann, wann

$$0.064 - 0.04a = 0 \Leftrightarrow a = \hat{a} = \boxed{1.6}.$$

Da (X,Y) eine 2-dimensionale Normalverteilung hat und X und $\hat{Y} = Y - \hat{a}X$ unkorreliert sind, sind sie auch unabhängig.

5.A3 [2 Punkte] Amanda möchte CHF 120 in die Aktien A und B investieren und erwägt zwei Strategien. Strategie (1) besteht darin, CHF 50 in Aktien A und CHF 50 in Aktien B zu investieren und CHF 20 auf der Bank zu belassen (wo sie keine Zinsen erhält). Bestimmen Sie die Verteilung von Amandas Vermögen nach einem Jahr, wenn sie Strategie (1) anwendet.

Lösung:

Wir bezeichnen mit U Amandas Vermögen nach einem Jahr. Es gilt

$$U = 20 + 50(1+X) + 50(1+Y) = 120 + 50X + 50Y,$$

sodass

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U] &= 120 + 50\mathbb{E}[X] + 50\mathbb{E}[Y] = 120 + 50 \times 0.1 + 50 \times 0.12 = 131,\\ \mathrm{Var}[U] &= 50^2(\mathrm{Var}[X] + 2\mathrm{Cov}[X,Y] + \mathrm{Var}[Y])\\ &= 50^2(0.04 + 0.128 + 0.16) = 100 + 320 + 400 = 820.\end{aligned}$$

Da (X, Y) eine 2-dimensionale Normalverteilung hat, erhalten wir $U \sim \boxed{\mathcal{N}(131, 820)}$.

5.A4 [2 Punkte] Strategie (2) besteht darin, CHF 100 in Aktien A und CHF 10 in Aktien B zu investieren und CHF 10 auf der Bank zu belassen. Welche der beiden Strategien würden Sie Amanda empfehlen und warum?

Lösung:

Wir bezeichnen mit V Amandas Vermögen nach einem Jahr, wenn sie Strategie (2) anwendet. Es gilt $V = 120 + 100X + 10Y$, sodass

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[V] &= 120 + 100 \times 0.1 + 10 \times 0.12 = 131.2,\\ \mathrm{Var}[V] &= (100^2\mathrm{Var}[X] + 2000\mathrm{Cov}[X, Y] + 100\mathrm{Var}[Y]) = 400 + 128 + 16 = 544.\end{aligned}$$

Da (X, Y) eine 2-dimensionale Normalverteilung hat, erhalten wir $V \sim \boxed{\mathcal{N}(131.2, 544)}$. Daher ist Strategie (2) zu empfehlen, weil $\mathbb{E}[V] > \mathbb{E}[U]$ und $\mathrm{Var}[V] < \mathrm{Var}[U]$ (d.h. Strategie (2) führt zu einer besseren Rendite bei geringerem Risiko).

Aufgabe 6

Seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen. Betrachten Sie die Modellfamilie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in (0,\infty)}$, so dass $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. unter $\mathbb{P}_\theta$ sind mit $X_1 \sim \text{Poi}(\theta)$.

6.A1 [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $T_M = (X_1 + \ldots + X_n)/n$ ein erwartungstreuer Schätzer für θ ist. Berechnen Sie $\text{MSE}_\theta(T_M)$.

Lösung:

Der Schätzer T_M ist Erwartungstreu denn

$$\mathbb{E}_\theta[T_M] = \frac{\sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\theta[X_j]}{n} = \frac{n\theta}{n} = \theta.$$

Somit erhalten wir

$$\text{MSE}_\theta(T_M) = (\mathbb{E}_\theta[T_M] - \theta)^2 + \text{Var}_\theta[T_M] = 0 + \frac{\sum_{j=1}^n \text{Var}_\theta[X_j]}{n^2} = \frac{\theta n}{n^2} = \boxed{\frac{\theta}{n}}.$$

Betrachten Sie die Nullhypothese $H_0 : \theta = 1$ und die Alternativhypothese $H_1 : \theta = 4$.

6.A2 [3 Punkte] Zeigen Sie, dass der Verwerfungsbereich K_α für T_M, der den mächtigsten Test zum Niveau α definiert, gegeben ist durch $K_\alpha = (c_\alpha, \infty)$ für eine Konstante $c_\alpha > 0$.

Lösung:

Die Likelihoodfunktion für θ ist

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^n \frac{\theta^{-x_j} e^{-\theta}}{x_j!} = e^{-n\theta} \prod_{j=1}^n \frac{\theta^{-x_j}}{x_j!}.$$

Nach dem Neyman-Pearson-Lemma hat der mächstige Test zum Niveau α die Form

$$\tilde{K}_\alpha = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n : \frac{L(4; x_1, \ldots, x_n)}{L(1; x_1, \ldots, x_n)} > \tilde{c}_\alpha \right\}$$

für eine Konstante $\tilde{c}_\alpha > 0$. Wir können den Likelihoodquotient vereinfachen durch

$$\frac{L(2; x_1, \ldots, x_n)}{L(1; x_1, \ldots, x_n)} = \frac{e^{-4n} \prod_{j=1}^n \frac{4^{x_j}}{x_j!}}{e^{-n} \prod_{j=1}^n \frac{1^{x_j}}{x_j!}} = e^{-3n} \prod_{j=1}^n 4^{x_j},$$

sodass $(x_1, \ldots, x_n) \in \tilde{K}_\alpha$ genau dann gilt, wenn

$$e^{-3n} \prod_{j=1}^n 4^{x_j} > \tilde{c}_\alpha \iff \log 4 \sum_{j=1}^n x_j > \log \tilde{c}_\alpha - 3n \iff \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j > \frac{\log(\tilde{c}_\alpha)/n - 3}{\log 4}.$$

Deshalb ist den mächtigsten Test für T_M zum Niveau α durch $K_\alpha = (c_\alpha, \infty)$ gegeben, wobei $c_\alpha = \frac{\log(\tilde{c}_\alpha)/n-3}{\log 4}$.

6.A3 **[4 Punkte]** Bestimmen Sie den approximativen Wert von $c = c_{0.95}$ für den Test $(T_M, K_{0.95})$ zum Niveau $\alpha = 95\%$. Was ist die Macht dieses Tests?

Lösung:

Die Konstante $c_{0.95}$ sollte so gewählt werden, dass das Niveau von (T_M, K_α) 95% ist, d.h.

$$\mathbb{P}_1[T_M > c_{0.95}] = 0.05.$$

Nach dem zentralen Grenzwertsatz haben wir unter $\mathbb{P}_1$ für grosses n, dass

$$\frac{T_M - 1}{1/\sqrt{n}} \approx \mathcal{N}(0,1).$$

Somit berechnen wir

$$\mathbb{P}_1[T_M > c_{0.95}] = \mathbb{P}_1\left[\frac{T_M - 1}{1/\sqrt{n}} > \sqrt{n}(c_{0.95} - 1)\right] \approx 1 - \Phi\Big(\sqrt{n}(c_{0.95} - 1)\Big).$$

Er folgt daraus, dass

$$1 - \Phi\Big(\sqrt{n}(c_{0.95} - 1)\Big) \approx 0.05 \iff \sqrt{n}(c_{0.95} - 1) \approx \Phi^{-1}(0.95) \iff c_{0.95} \approx \boxed{1 + \frac{1.64}{\sqrt{n}}}.$$

Für diesen Wert von $c_{0.95}$ ist die Macht des Tests $(T_M, K_{0.95})$ dann gleich $\mathbb{P}_4[T_M > c_{0.95}]$. Nach dem zentralen Grenzwertsatz haben wir unter $\mathbb{P}_4$ für grosses n, dass

$$\frac{T_M - 4}{2/\sqrt{n}} \approx \mathcal{N}(0,1),$$

und somit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_4[T_M > c_{0.95}] &= \mathbb{P}_4\left[\frac{T_M - 4}{2/\sqrt{n}} > \frac{\sqrt{n}(c_{0.95} - 4)}{2}\right] \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(c_{0.95} - 4)}{2}\right) \approx 1 - \Phi(0.82 - 3\sqrt{n}/2) = \boxed{\Phi(3\sqrt{n}/2 - 0.82)}.\end{aligned}$$