Aufgaben und Lösungsvorschlag Gruppe D

Aufgabe 1

Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt Ihre Antwort an. Pro Teilaufgabe ist genau eine der Antwortmöglichkeiten richtig.
Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Antworten nicht begründen.
Bemerkung: Die maximale Punktzahl für den Multiple-Choice-Teil bleibt 30 Punkte. Wenn mehr als 30 Punkte erreicht werden, wird dennoch die maximale Punktzahl von 30 Punkten angerechnet.

1.MC1 [3 Punkte] Gegeben seien zwei Ereignisse C und D mit $\mathbb{P}[D] > 0$. Es sei bekannt, dass $\mathbb{P}[C \mid D] = \mathbb{P}[C] + \mathbb{P}[D] - 1$. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

(A) $\mathbb{P}[C \cup D] = 1 - \mathbb{P}[(C^c) \cap (D^c)]$

(B) $\mathbb{P}[C \cap D] = \Big(\mathbb{P}[C] + \mathbb{P}[D] - 1\Big) \cdot \mathbb{P}[D]$

(C) **CORRECT:** $\mathbb{P}[C \cap D] = \mathbb{P}[C] \cdot \mathbb{P}[D]$

(D) $\mathbb{P}[C \cup D] = \mathbb{P}[C] + \mathbb{P}[D] - \mathbb{P}[C \cap D]$

Lösung:

$\mathbb{P}[C \cap D] = (\mathbb{P}[C] + \mathbb{P}[D] - 1) \cdot \mathbb{P}[D]$: Wahr, folgt aus $\mathbb{P}[C \cap D] = \mathbb{P}[C \mid D] \cdot \mathbb{P}[D]$.

$\mathbb{P}[C \cup D] = \mathbb{P}[C] + \mathbb{P}[D] - \mathbb{P}[C \cap D]$: Wahr, Standardregel für Vereinigungen.

$\mathbb{P}[C \cap D] = \mathbb{P}[C] \cdot \mathbb{P}[D]$: Falsch, da Unabhängigkeit nicht gegeben ist.

$\mathbb{P}[C \cup D] = 1 - \mathbb{P}[(C^c) \cap (D^c)]$: Wahr, folgt aus der Definition des Komplements.

1.MC2 [3 Punkte] Sei X eine Zufallsvariable mit den Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}[X = -1] = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}[X = 0] = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}[X = 2] = \frac{1}{4}.$$

Was ist die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ von X?

(A)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ \frac{1}{4} & \text{für } x = -1, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0, \\ \frac{3}{4} & \text{für } x = 2, \\ 1 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

(B)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ \frac{1}{4} & \text{für } x = -1, \\ \frac{3}{4} & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x = 2, \\ 0 & \text{für } x \notin \{-1, 0, 2\}. \end{cases}$$

(C)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -1, \\ \frac{1}{4} & \text{für } -1 < x \leq 0, \\ \frac{3}{4} & \text{für } 0 < x \leq 2, \\ 1 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

(D) **CORRECT:**

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ \frac{1}{4} & \text{für } -1 \leq x < 0, \\ \frac{3}{4} & \text{für } 0 \leq x < 2, \\ 1 & \text{für } x \geq 2. \end{cases}$$

Lösung:

Die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ ist definiert als die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert kleiner oder gleich x annimmt:

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x].$$

Wir haben die Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathbb{P}[X = -1] = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}[X = 0] = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}[X = 2] = \frac{1}{4}.$$

Die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ ist daher:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ \frac{1}{4} & \text{für } -1 \leq x < 0, \\ \frac{3}{4} & \text{für } 0 \leq x < 2, \\ 1 & \text{für } x \geq 2. \end{cases}$$

Die richtige Antwort ist daher (A).

1.MC3 [3 Punkte] Gegeben seien drei Ereignisse A, B und C mit $\mathbb{P}[A] > 0$, $\mathbb{P}[B] > 0$, $\mathbb{P}[C] > 0$. Welche der folgenden Aussagen ist **wahr**?

(A) $\mathbb{P}[A \mid (B \cap C)] \geq \mathbb{P}[A \mid B \cup C]$

(B) **CORRECT:** $\mathbb{P}[A \mid (B \cup C)] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B] + \mathbb{P}[A \cap C] - \mathbb{P}[A \cap B \cap C]}{\mathbb{P}[B \cup C]}$

(C) $\mathbb{P}[A \cap (B \cup C)] = \mathbb{P}[A \cap B] + \mathbb{P}[A \cap C]$

(D) $B \subset C \implies \mathbb{P}[A \mid B] \neq \mathbb{P}[A \mid C]$

Lösung:

Wir überprüfen die Aussagen:

1. $B \subseteq C \implies \mathbb{P}[A \mid B] \neq \mathbb{P}[A \mid C]$: Falsch. Es gibt keine Regel, die dies allgemein garantiert.

2. $\mathbb{P}[A \cap (B \cup C)] = \mathbb{P}[A \cap B] + \mathbb{P}[A \cap C]$: Falsch. Diese Gleichung berücksichtigt die Überschneidung von B und C nicht und ist daher im Allgemeinen nicht korrekt.

3. Ein Gegenbeispiel für $\mathbb{P}[A \mid (B \cap C)] \geq \mathbb{P}[A \mid (B \cup C)]$: Sei der Grundraum $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ mit $\mathbb{P}[\{x_i\}] = \frac{1}{4}$. Sei $A = \{x_1\}$, $B = \{x_1, x_2\}$, $C = \{x_2, x_3\}$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}[A \mid (B \cap C)] = 0, \quad \mathbb{P}[A \mid (B \cup C)] = \frac{1}{3}.$$

Die Aussage ist falsch, da $\mathbb{P}[A \mid (B \cap C)] < \mathbb{P}[A \mid (B \cup C)]$.

4. $\mathbb{P}[A \mid (B \cup C)] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B] + \mathbb{P}[A \cap C] - \mathbb{P}[A \cap B \cap C]}{\mathbb{P}[B \cup C]}$: Wahr. Diese Formel beschreibt korrekt die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben $B \cup C$, unter Verwendung der Regel für Vereinigungen.

1.MC4 [3 Punkte] Seien X, Y zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte f. Welche Aussage ist korrekt?

(A) $\mathbb{E}[\sqrt{X^2 + Y^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \cdot x \cdot y \, dx \, dy$

(B) $\mathbb{E}[\sqrt{X^2 + Y^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \, dx \, dy$

(C) $\mathbb{E}[\sqrt{X^2 + Y^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$

(D) **CORRECT:** $\mathbb{E}[\sqrt{X^2 + Y^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$

1.MC5 [3 Punkte] Welche der folgenden Funktionen ist eine Dichte?

(A) $k(x) = (x^2 - \frac{5}{6}x) \cdot 1_{0 \leq x \leq 2}$.

(B) $h(x) = (1 - x^2) \cdot 1_{-1 \leq x \leq 1}$,

(C) **CORRECT:** $f(x) = 2e^{-2x} \cdot 1_{x \geq 0}$,

(D) $g(x) = \frac{1}{3}x \cdot 1_{0 \leq x \leq 3}$,

Lösung:

Eine Funktion $p(x)$ ist eine Dichte, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt: 1. $p(x) \geq 0$ für alle x. 2. Das Integral über den Definitionsbereich ergibt 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \, dx = 1.$$

Wir überprüfen die Funktionen:

1. $g(x) = \frac{1}{3}x \cdot 1_{0 \leq x \leq 3}$: Diese Funktion ist nicht-negativ im Bereich $[0, 3]$. Das Integral ist:

$$\int_0^3 \frac{1}{3}x \, dx = \frac{1}{3} \int_0^3 x \, dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_0^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3}{2}.$$

Da das Integral nicht 1 ist, ist $g(x)$ keine Dichte.

2. $f(x) = 2e^{-2x} \cdot 1_{x \geq 0}$: Diese Funktion ist nicht-negativ für $x \geq 0$. Das Integral ist:

$$\int_0^{\infty} 2e^{-2x} \, dx = 2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-2x} \, dx = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Da beide Bedingungen erfüllt sind, ist $f(x)$ eine Dichte.

3. $h(x) = (1 - x^2) \cdot 1_{-1 \le x \le 1}$: Diese Funktion ist nicht-negativ für $x \in [-1, 1]$. Das Integral ist:

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \int_{-1}^{1} 1\, dx - \int_{-1}^{1} x^2\, dx.$$

Berechnen wir:

$$\int_{-1}^{1} 1\, dx = 2, \quad \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Daher:

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Da das Integral nicht 1 ist, ist $h(x)$ keine Dichte.

4. $k(x) = \left(x^2 - \frac{5}{6}x\right) \cdot 1_{0 \le x \le 2}$: Diese Funktion kann negativ werden, da $x^2 - \frac{5}{6}x$ nicht überall nicht-negativ ist. Eine Dichtefunktion muss nicht-negativ sein, also ist $k(x)$ keine Dichte.

Antwort: $f(x)$ ist die einzige Dichte.

1.MC6 [3 Punkte] Es seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_k) = k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei S_n definiert durch

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Berechne den Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\frac{S_n}{n}\right).$$

(A) 0

(B) **CORRECT:** $\frac{1}{2}$

(C) ∞

(D) 1

Lösung:

Die Varianz von $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ ist: $\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Für $\frac{S_n}{n}$ gilt: $\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$.

Der Grenzwert für $n \to \infty$ ist: $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Antwort: $\frac{1}{2}$.

1.MC7 [3 Punkte] Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \mathrm{Poisson}(1)$ und $Y \sim \mathrm{Poisson}(2)$. Berechne die Varianz von $Z = \frac{X-Y}{2}$.

(A) $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Z) = 1$

(B) **CORRECT:** $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Z) = \frac{3}{4}$

(C) $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Z) = \frac{3}{2}$

(D) $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Z) = \frac{1}{2}$

Lösung:

Die Varianz einer Poisson-verteilten Zufallsvariablen $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ist gegeben durch:

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \lambda.$$

Daher gilt für $X \sim \text{Poisson}(1)$ und $Y \sim \text{Poisson}(2)$:

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = 1, \quad \mathbb{V}\text{ar}(Y) = 2.$$

Da X und Y unabhängig sind, gilt für die Differenz $X - Y$:

$$\mathbb{V}\text{ar}(X - Y) = \mathbb{V}\text{ar}(X) + \mathbb{V}\text{ar}(Y).$$

Einsetzen der Werte ergibt:

$$\mathbb{V}\text{ar}(X - Y) = 1 + 2 = 3.$$

Für die skalierte Zufallsvariable $Z = \frac{X-Y}{2}$ gilt die Regel für die Skalierung der Varianz:

$$\mathbb{V}\text{ar}\left(\frac{X-Y}{2}\right) = \frac{1}{4}\mathbb{V}\text{ar}(X - Y).$$

Einsetzen von $\mathbb{V}\text{ar}(X - Y) = 3$ ergibt:

$$\mathbb{V}\text{ar}(Z) = \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}.$$

Antwort: $\mathbb{V}\text{ar}(Z) = \frac{3}{4}$.

1.MC8 [3 Punkte] Seien (X_n) unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Wir betrachten den Grenzwert

$$A := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k^3.$$

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(A) $A = +\infty$

(B) **CORRECT:** $A = 0$

(C) $A = \frac{1}{4}$

(D) $A = 1$

Lösung:

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k^3 = \mathbb{E}[X_1^3] = 0.$

1.MC9 [4 Punkte] Gegeben seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_k \sim \mathcal{U}([-1, 1])$, also gleichverteilt auf dem Intervall $[-1, 1]$. Sei $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Betrachte den Grenzwert:

$$A := \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[-1 \leq S_n \leq 1].$$

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(A) **CORRECT:** $A = 0$

(B) $A = \infty$

(C) $A = 1$

(D) $A = \frac{1}{2}$

Lösung:

1. Da $X_k \sim \mathcal{U}([-1, 1])$, gilt:
$$\mathbb{E}[X_k] = 0, \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_k) = \frac{1}{3}.$$
2. Die Summe $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ hat die Varianz:
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n) = n \cdot \frac{1}{3} = \frac{n}{3}.$$
3. Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt:
$$\frac{S_n}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n)}} = \frac{S_n}{\sqrt{n/3}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{für } n \to \infty.$$
4. Die Wahrscheinlichkeit lässt sich wie folgt umformen:
$$\mathbb{P}[-1 \leq S_n \leq 1] = \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\sqrt{n/3}} \leq \frac{S_n}{\sqrt{n/3}} \leq \frac{1}{\sqrt{n/3}}\right).$$

Da $\frac{1}{\sqrt{n/3}} \to 0$ für $n \to \infty$, folgt:

$$\mathbb{P}[-1 \leq S_n \leq 1] \to 0.$$

Antwort: 0.

1.MC10 [4 Punkte] Gegeben seien unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$, wobei $\lambda > 0$ ein unbekannter Parameter ist. Bestimme eine erwartungstreue (unverzerrte) Schätzung für λ^2 basierend auf der Stichprobe.

(A) $\hat{\lambda}_n^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)^2$

(B) **CORRECT:** $\hat{\lambda}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$

(C) $\hat{\lambda}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$

(D) $\hat{\lambda}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i^2 - 1)$

Lösung:

Für $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ gilt:

$$\mathbb{E}[X_i^2] = \mathbb{V}\text{ar}(X_i) + (\mathbb{E}[X_i])^2 = \lambda + \lambda^2.$$

Daraus folgt:

$$\lambda^2 = \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i].$$

Die entsprechende Schätzung ist:

$$\hat{\lambda}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i.$$

Diese Schätzung ist unverzerrt, da:

$$\mathbb{E}[\hat{\lambda}_n^2] = \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i] = \lambda^2.$$

1.MC11 [4 Punkte] Seien $X_1, X_2, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_k \sim \mathcal{U}([0,1])$, d.h., sie sind gleichverteilt auf dem Intervall $[0,1]$. Sei $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$ und $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$.

Bestimme den Erwartungswert von $M_n := \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$.

(A) $\mathbb{E}[M_n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$

(B) **CORRECT:** $\mathbb{E}[M_n] = \frac{1}{2}$

(C) $\mathbb{E}[M_n] = \frac{n+1}{2(n+2)}$

(D) $\mathbb{E}[M_n] = \frac{n}{2(n+1)}$

Lösung:

Für $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$ gilt:

$$\mathbb{P}[X_{(n)} \le x] = \mathbb{P}[X_1 \le x, \dots, X_n \le x] = x^n, \quad f_{X_{(n)}}(x) = nx^{n-1}.$$

Daher ist:

$$\mathbb{E}[X_{(n)}] = \frac{n}{n+1}.$$

Für $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$ gilt:

$$\mathbb{P}[X_{(1)} > x] = \mathbb{P}[X_1 > x, \dots, X_n > x] = (1-x)^n, \quad f_{X_{(1)}}(x) = n(1-x)^{n-1}.$$

Daher ist:

$$\mathbb{E}[X_{(1)}] = \frac{1}{n+1}.$$

Für $M_n = \frac{X_{(1)}+X_{(n)}}{2}$ ergibt sich:

$$\mathbb{E}[M_n] = \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}[X_{(1)}] + \mathbb{E}[X_{(n)}]\right) = \frac{1}{2}.$$

Antwort: $\mathbb{E}[M_n] = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 2

2.A1 [2 Punkte] Sei X eine Zufallsvariable mit

$$\mathbb{P}[X=5]=\frac{3}{5}, \quad \mathbb{P}[X=10]=\frac{1}{10}, \quad \mathbb{P}[X=13]=0 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[X=20]=\frac{3}{10}.$$

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Lösung:

Es gilt

$$\mathbb{E}[X]=\frac{3}{5}\cdot 5+\frac{1}{10}\cdot 10+0\cdot 13+\frac{3}{10}\cdot 20=3+1+0+6=10.$$

Damit folgt

$$\mathbb{V}[X]=\frac{3}{5}\cdot(5-10)^2+\frac{1}{10}\cdot(10-10)^2+0\cdot(13-10)^2+\frac{3}{10}\cdot(20-10)^2=15+0+0+30=45.$$

2.A2 [3 Punkte] Seien X, Y zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f:\mathbb{R}^2\to[0,\infty)$ definiert durch

$$f(x,y)=\left(x+\frac{3}{2}y^2\right)\mathbb{1}_{\{x\in[0,1]\}}\mathbb{1}_{\{y\in[0,1]\}}.$$

Berechnen Sie die Randdichten f_X und f_Y von X und Y.

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(x+\frac{3}{2}y^2\right)\mathbb{1}_{\{x\in[0,1]\}}\mathbb{1}_{\{y\in[0,1]\}}\,dy \\
&= \int_0^1\left(x+\frac{3}{2}y^2\right)dy\cdot\mathbb{1}_{\{x\in[0,1]\}} \\
&= \left[xy+\frac{1}{2}y^3\right]_0^1\cdot\mathbb{1}_{\{x\in[0,1]\}} \\
&= \left(x+\frac{1}{2}\right)\mathbb{1}_{\{x\in[0,1]\}}.
\end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(x + \frac{3}{2}y^2\right) \mathbb{1}_{\{x\in[0,1]\}}\, \mathbb{1}_{\{y\in[0,1]\}}\,dx \\ &= \int_0^1 \left(x + \frac{3}{2}y^2\right) dx \cdot \mathbb{1}_{\{y\in[0,1]\}} \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}xy^2\right]_0^1 \cdot \mathbb{1}_{\{y\in[0,1]\}} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}y^2\right) \mathbb{1}_{\{y\in[0,1]\}}. \end{aligned}$$

2.A3 [5 Punkte] Seien $\lambda > 0$ und

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

wobei $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathrm{Exp}(\lambda)$ verteilt sind. Das heisst, die Dichte von X_1 ist gegeben durch

$$f_{X_1}(x) = \lambda e^{-\lambda x}\, \mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}.$$

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y.

Lösung:

Der Erwartungswert von X ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx \\ &= \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx \\ &= 0 + \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{\lambda}\cdot(-1) = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \int_0^{\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}\,dx \\ &= \left[-x^2e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2xe^{-\lambda x}\,dx \\ &= 0 + \frac{2}{\lambda}E[X] \\ &= \frac{2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Daher folgt

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Da $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen sind, erhalten wir

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = n \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{n}{\lambda}.$$

$$\mathbb{V}[Y] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}[X_i] = n \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{n}{\lambda^2}.$$

Aufgabe 3

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] = 0$ und $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Definiere $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

3.A1 [1 Punkt] Berechnen Sie $\mathbb{E}[S_n^2]$.

Lösung:

Da $\mathbb{E}[S_n] = 0$, gilt $\mathbb{E}[S_n^2] = \mathrm{Var}(S_n) = n \cdot \mathrm{Var}(X_1) = n\sigma^2$.

3.A2 [3 Punkte] Gegeben ist zusätzlich, dass $\mathbb{P}[X_1 = 0] > 0$ und $\mathbb{P}[X_1 \leq 1] = \frac{2}{3}$. Berechnen Sie $\mathbb{P}[S_n \leq 1 \mid S_{n-1} = 0]$.

Lösung:

Nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\mathbb{P}[S_n \leq 1 \mid S_{n-1} = 0] = \frac{\mathbb{P}[S_n \leq 1 \cap S_{n-1} = 0]}{\mathbb{P}[S_{n-1} = 0]}.$$

Da $S_n = S_{n-1} + X_n$ und $S_{n-1} = 0$, folgt $S_n = X_n$. Somit ist:

$$\mathbb{P}[S_n \leq 1 \cap S_{n-1} = 0] = \mathbb{P}[X_n \leq 1 \cap S_{n-1} = 0].$$

Da X_n und S_{n-1} unabhängig sind:

$$\mathbb{P}[X_n \leq 1 \cap S_{n-1} = 0] = \mathbb{P}[X_n \leq 1] \cdot \mathbb{P}[S_{n-1} = 0].$$

Setzen wir dies ein:

$$\mathbb{P}[S_n \leq 1 \mid S_{n-1} = 0] = \frac{\mathbb{P}[X_n \leq 1] \cdot \mathbb{P}[S_{n-1} = 0]}{\mathbb{P}[S_{n-1} = 0]} = \mathbb{P}[X_n \leq 1].$$

Da $X_n \sim X_1$, gilt $\mathbb{P}[X_n \leq 1] = \frac{2}{3}$.

Antwort:

$$\mathbb{P}[S_n \leq 1 \mid S_{n-1} = 0] = \frac{2}{3}.$$

3.A3 [2 Punkte] Argumentieren Sie, warum $\mathbb{P}\left[\frac{S_n^2}{n} \geq 2\sigma^2\right] \leq \frac{1}{2}$.

Lösung:

Wir verwenden die Markow-Ungleichung:

$$\mathbb{P}[Y \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{a}, \quad \text{für } Y \geq 0 \text{ und } a > 0.$$

Setzen wir $Y = \frac{S_n^2}{n}$ und $a = 2\sigma^2$. Der Erwartungswert von Y ist:

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_n^2}{n}\right] = \frac{\mathbb{E}[S_n^2]}{n} = \frac{n\sigma^2}{n} = \sigma^2.$$

Nach der Markow-Ungleichung gilt:

$$\mathbb{P}\left[\frac{S_n^2}{n} \geq 2\sigma^2\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[\frac{S_n^2}{n}\right]}{2\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{2}.$$

3.A4 [4 Punkte] Gegeben ist $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{S_n}{\sqrt{n}} > 1\right] = \frac{1}{3}$. Berechnen Sie σ. **Hinweis:** $\Phi(0.43) = \frac{2}{3}$.

Lösung:

Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt:

$$\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Das bedeutet, dass für jede reelle Zahl x:

$$\mathbb{P}\left[\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right] \to \Phi(x),$$

wobei $\Phi(x)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.
Gegeben ist:

$$\mathbb{P}\left[\frac{S_n}{\sqrt{n}} > 1\right] = \frac{1}{3}.$$

Schreiben wir dies um:

$$\mathbb{P}\left[\frac{S_n}{\sqrt{n}} > 1\right] = \mathbb{P}\left[\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{1}{\sigma}\right].$$

Aus der Definition der Standardnormalverteilung folgt:

$$\mathbb{P}\left[\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{1}{\sigma}\right] = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

Nach der Aufgabenstellung gilt:

$$1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \frac{1}{3}.$$

Daraus folgt:

$$\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \frac{2}{3}.$$

Aus der Tabelle der Standardnormalverteilung wissen wir:

$$\Phi(0.43) = \frac{2}{3}.$$

Also ist:

$$\frac{1}{\sigma} = 0.43 \implies \sigma = \frac{1}{0.43} \approx 2.33.$$

Aufgabe 4

Ein Motorrad läuft im Mittel 2 Jahre bis zur ersten Störung. Die Einsatzdauer T (in Jahre) wird von einer Gewichtsfunktion p_T beschrieben, wobei

$$p_T(t) = \mathbb{P}(T = t) = (1-\vartheta)^{t-1}\vartheta, \quad t \in \mathbb{N},$$

mit Parameter $\vartheta \in (0,1)$. Die Familie F. möchte diese Verteilung genauer bestimmen. Für die fünf Moterräder dieser Familie wurden die folgenden Zeiten bis zur ersten Störung beobachtet:

$$t_1 = 4,\ t_2 = 0,\ t_3 = 1,\ t_4 = 6,\ t_5 = 2.$$

4.A1 [5 Punkte] Bestimmen Sie die Likelihood-Funktion und leiten Sie daraus den Maximum-Likelihood-Schätzer T_{ML} für den Parameter ϑ her. Wie lautet der realisierte Schätzwert?

Lösung:

Die Likelihood-Funktion lautet

$$L(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5; \vartheta) = \prod_{i=1}^{5} (1-\vartheta)^{t_i - 1}\vartheta.$$

Daher ist die log-Likelihood-Funktion gegeben durch

$$\begin{aligned}
\log L(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5; \vartheta) &= \log\left(\prod_{i=1}^{5} (1-\vartheta)^{t_i-1}\vartheta\right) \\
&= \sum_{i=1}^{5} \left[(t_i - 1)\log(1-\vartheta) + \log(\vartheta)\right] \\
&= 5\log(\vartheta) + \log(1-\vartheta)\sum_{i=1}^{5}(t_i - 1).
\end{aligned}$$

Wir maximieren die log-Likelihood-Funktion bezüglich dem Parameter ϑ und erhalten

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log L(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5; \vartheta) = \frac{5}{\vartheta} - \frac{1}{1-\vartheta}\sum_{i=1}^{5}(t_i - 1) \stackrel{!}{=} 0,$$

$$\implies T_{ML} = \frac{5}{\sum_{i=1}^{5} T_i}.$$

Der realisierte Schätzwert ist somit

$$t_{ML} = \frac{5}{\sum_{i=1}^{5} t_i} = \frac{5}{13}.$$

4.A2 [2 Punkte] Bestimmen Sie den Momentenschätzer T_{MM} für ϑ. Wie lautet der realisierte Schätzwert?

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\mathbb{E}_\vartheta[T] = 1/\vartheta$.

Lösung:

Da $\mathbb{E}_\vartheta[T] = 1/\vartheta$, gilt

$$\mathbb{E}_\vartheta\left[\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} T_i\right] = 1/\vartheta.$$

Somit erhalten wir

$$T_{MM} = \frac{1}{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} T_i} = \frac{5}{\sum_{i=1}^{5} T_i} = T_{ML}.$$

Der realisierte Schätzwert ist somit

$$t_{MM} = \frac{5}{\sum_{i=1}^{5} t_i} = \frac{5}{13}.$$

4.A3 [3 Punkte] Seien $\vartheta \in (0,1)$ and $i \in \{1, \dots, 5\}$. Wir nehmen nun an, dass T_i unabhängig und $\mathrm{Bin}(8, \vartheta)$ verteilt sind. Berechnen Sie $\mathrm{MSE}_\vartheta(T_M)$, wobei

$$T_M = \frac{\sum_{i=1}^{5} T_i}{40}.$$

Lösung:

$$\mathrm{MSE}_\vartheta(T_M) = \mathrm{Var}_\vartheta(T_M) + (\mathbb{E}_\vartheta[T_M] - \vartheta)^2$$

Berechnen wir die Varianz von T_M:

$$\mathrm{Var}(T_i) = 8\vartheta(1-\vartheta).$$

Da die T_i unabhängig sind:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{5} T_i\right) = \sum_{i=1}^{5} \mathrm{Var}(T_i) = 5 \cdot 8\vartheta(1-\vartheta) = 40\vartheta(1-\vartheta).$$

Für T_M folgt:

$$\mathrm{Var}(T_M) = \left(\frac{1}{40}\right)^2 \cdot 40\vartheta(1-\vartheta) = \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{40}.$$

Da T_M erwartungstreu ist:

$$\mathbb{E}[T_M] = \vartheta,$$

folgt schließlich:

$$\mathrm{MSE}_\vartheta(T_M) = \mathrm{Var}(T_M) + (\mathbb{E}[T_M] - \vartheta)^2 = \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{40}.$$