D–INFK

Prüfung Wahrscheinlichkeit und Statistik

401-0614-00L

Nachname

XX

Vorname

XX

Legi-Nr.

XX-000-000

Prüfungs-Nr.

001

Bitte noch nicht umblättern!

Aufgabe 1

[6 Punkte]

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine unendliche Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen, wobei X_1 diskret ist mit

$$\mathbb{P}[X_1 = -1] = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[X_1 = 3] = \frac{1}{2}.$$

1.MC1 [1 Punkt] Was ist der Erwartungswert von X_1?

(A) 4
(B) 2
(C) 0
(D) 1

1.MC2 [1 Punkt] Was ist die Varianz von X_1?

(A) 1
(B) 4
(C) 2
(D) 5

Für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ betrachten wir die Partialsumme

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n.$$

1.MC3 [1 Punkt] Was ist der Erwartungswert von S_n?

(A) $4n$
(B) $2n$
(C) $n/2$
(D) n

1.MC4 [1 Punkt] Was ist die Varianz von S_n?

(A) $4n^2$
(B) $16n^2$
(C) $2n$
(D) $4n$

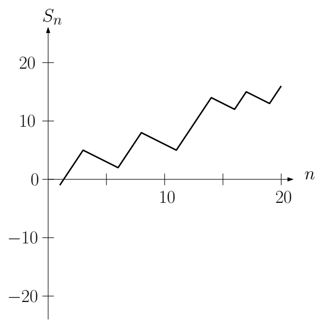
1.MC5 [1 Punkt] Was ist der fast sichere Grenzwert von

$$\frac{S_n}{n}$$

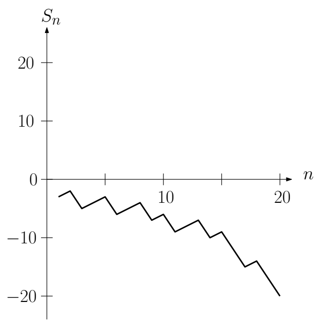
für $n \to \infty$?

(A) ∞
(B) 2
(C) 0
(D) 1

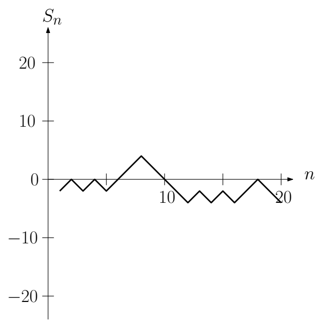
1.MC6 [1 Punkt] Wir haben die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$ simuliert und die Partialsummen S_n für $n = 1, \ldots, 20$ graphisch dargestellt. Welche der folgenden Darstellungen haben wir erhalten?



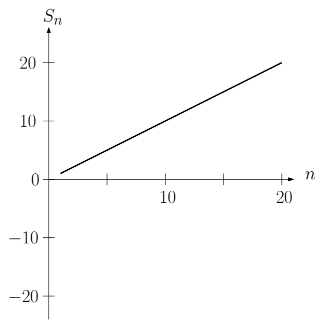
(A)



(B)



(C)



(D)

Aufgabe 2

[4 Punkte]

2.MC1 [1 Punkt] Sei $\Omega = \{0,1\}$ und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$. In welchem Fall ist die Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $(\Omega, \mathcal{F})$?

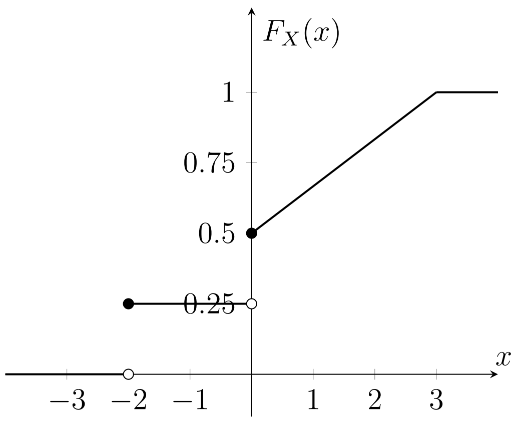
(A) $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$, $\mathbb{P}[\{0\}] = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}[\{1\}] = \frac{2}{3}$ und $\mathbb{P}[\{0,1\}] = 1$

(B) $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$, $\mathbb{P}[\{0\}] = 0$, $\mathbb{P}[\{1\}] = 0$ und $\mathbb{P}[\{0,1\}] = 1$

(C) $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$, $\mathbb{P}[\{0\}] = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}[\{1\}] = \frac{1}{3}$ und $\mathbb{P}[\{0,1\}] = 1$

(D) $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$, $\mathbb{P}[\{0\}] = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}[\{1\}] = \frac{1}{3}$ und $\mathbb{P}[\{0,1\}] = \frac{2}{3}$

2.MC2 [1 Punkt] Wir betrachten die folgende Verteilungsfunktion F_X einer Zufallsvariable X. Welche Aussage ist korrekt?



(A) Die Zufallsvariable X ist sowohl stetig als auch diskret.

(B) Die Zufallsvariable X ist stetig.

(C) Die Zufallsvariable X ist diskret.

(D) Die Zufallsvariable X ist weder stetig noch diskret.

2.MC3 [1 Punkt] Seien X, Y und Z drei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte f. Welche Aussage ist korrekt?

(A) $\mathbb{E}[X^2 + YZ] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\ dx\,dy\,dz$

(B) $\mathbb{E}[X^2 + YZ] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x,y,z)\ dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yz \cdot f(x,y,z)\,dy\,dz$

(C) $\mathbb{E}[X^2 + YZ] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 yz \cdot f(x,y,z)\ dx\,dy\,dz$

(D) $\mathbb{E}[X^2 + YZ] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + yz) \cdot f(x,y,z)\ dx\,dy\,dz$

2.MC4 [1 Punkt] Sei $\Theta = [0,1]$. Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \theta \in [0, 1/4] \cup [3/4, 1]$. Welche Alternativhypothese ist **nicht** möglich?

(A) $H_A : \theta \in [1/3, 2/3]$

(B) $H_A : \theta \in (1/3, 2/3)$

(C) $H_A : \theta \in [1/5, 4/5]$

(D) $H_A : \theta = 1/2$

Aufgabe 3

[10 Punkte]

3.MC1 [2 Punkte] Sei $\Omega = \{1,2,3,4\}$. In welchem Fall ist $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Ω?

(A) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

(B) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$

(C) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2,3,4\}\}$

(D) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$

3.MC2 [2 Punkte] Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{P}[X=0] = 1/5$, $\mathbb{P}[X=1] = 2/5$, $\mathbb{P}[X=2] = 0$ und $\mathbb{P}[X=3] = 2/5$. Was ist die Verteilungsfunktion F_X?

(A)

$$F_X(x) = \begin{cases} 1/5 & \text{für } x < 0, \\ 2/5 & \text{für } 0 \le x < 1, \\ 0 & \text{für } 1 \le x < 3, \\ 2/5 & \text{für } x \ge 3. \end{cases}$$

(B)

$$F_X(x) = \begin{cases} 1/5 & \text{für } x = 0, \\ 2/5 & \text{für } x = 1, \\ 2/5 & \text{für } x = 3, \\ 0 & \text{für } x \notin \{0,1,3\}. \end{cases}$$

(C)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1/5 & \text{für } 0 \le x < 1, \\ 3/5 & \text{für } 1 \le x < 3, \\ 1 & \text{für } x \ge 3. \end{cases}$$

(D)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ (x+1)/5 & \text{für } -1 \le x \le 4, \\ 1 & \text{für } x > 4. \end{cases}$$

3.MC3 [2 Punkte] Seien X und Y zwei unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Varianz $\sigma^2 = 2$. Was ist die Varianz der Zufallsvariable $Z := 1 + X - Y - Y$?

(A) 7

(B) 6

(C) 10

(D) 11

3.MC4 [2 Punkte] Sei $\Theta = [0,1]$ und seien $X_1, \ldots, X_6$ unabhängig, identisch verteilt unter $\mathbb{P}_\theta$ mit $X_i \sim \mathrm{Ber}(\theta)$. Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \theta = 1/2$ und die Alternativhypothese $H_A : \theta = 1/3$. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art für den Test (T, K) mit

$$T = \sum_{i=1}^{6} X_i \quad \text{und} \quad K = (-\infty, 0]\ ?$$

(A) $1 - (1/2)^6$

(B) $1 - (2/3)^6$

(C) $(1/2)^6$

(D) $(2/3)^6$

3.MC5 [2 Punkte] Sei $\Theta = \mathbb{N}$. Seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen. Wir betrachten die Modellfamilie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$, sodass $X_1, \ldots, X_n$ unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig, identisch verteilt sind mit $X_i \sim \mathrm{Bin}(\theta, 1/3)$. Welcher der folgenden Schätzer ist **nicht** erwartungstreu?

(A) $T_3 = X_1 + X_2 + X_3$

(B) $T_1 = X_1$

(C) $T_4 = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

(D) $T_2 = 3X_1$

Aufgabe 4

[10 Punkte]

Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_X(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a < -\pi/2, \\ \frac{1+\sin(a)}{2}, & \text{falls } a \in [-\pi/2, \pi/2], \\ 1, & \text{falls } a > \pi/2. \end{cases}$$

4.F1 [**1 Punkt**] Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X.

4.F2 [**2 Punkte**] Zeigen Sie, dass X eine stetige Zufallsvariable ist und berechnen Sie die Dichte von X.

4.F3 [**1 Punkt**] Skizzieren Sie die Dichte von X.

4.F4 [**4 Punkte**] Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

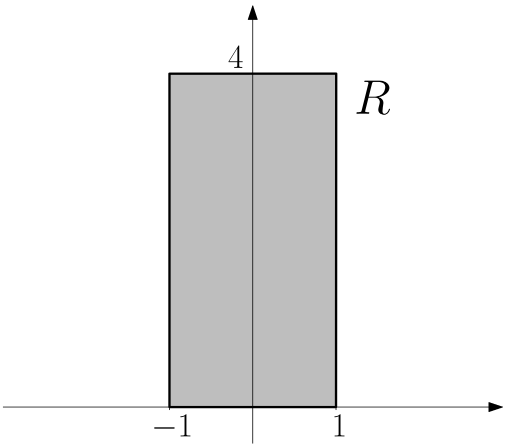
4.F5 [**2 Punkte**] Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}[X = e^{-\pi}] \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[0 \leq X \leq \pi/4].$$

Aufgabe 5

[10 Punkte]

Wir betrachten das Quadrat $R = [-1,1] \times [0,4]$:



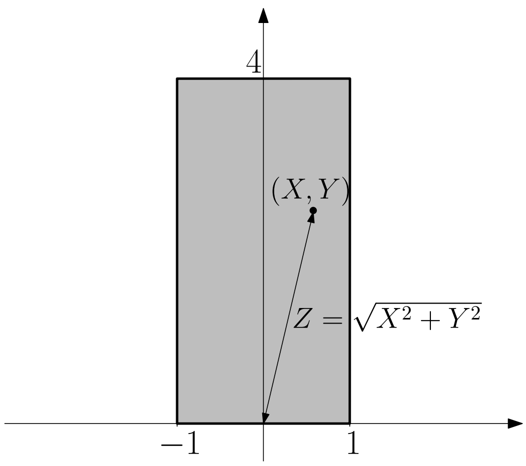
Seien X, Y zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{1}{8} \cdot \mathbb{1}_{x \in [-1,1]} \cdot \mathbb{1}_{y \in [0,4]} = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{falls } (x,y) \in R, \\ 0 & \text{falls } (x,y) \notin R. \end{cases}$$

5.F1 [3 Punkte] Bestimmen Sie die Randdichten f_X und f_Y von X und Y.

5.F2 [1 Punkt] Sind X und Y unabhängig?

5.F3 [4 Punkte] Wir betrachten die Zufallsvariable $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Diese repräsentiert die Euklidische Distanz des zufälligen Punkts (X, Y) vom Ursprung $(0, 0)$.



Berechnen Sie $\mathbb{E}[Z^2]$ und $\mathbb{E}[Z^2 X^2]$.

5.F4 [2 Punkte] Zeigen Sie, dass

$$0 \leq \mathbb{E}[Z] \leq \sqrt{17/3}.$$

Aufgabe 6

[10 Punkte]

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\Theta = \mathbb{R}$. Wir wählen eine Modellfamilie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$, sodass die Zufallsvariablen $X_1, \dots X_n$ unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig und identisch verteilt sind mit

$$X_1 \sim \mathcal{N}(\theta, 4).$$

Der Parameter θ ist unbekannt und soll im Folgenden geschätzt werden.
Erinnerung: Aus $X_1 \sim \mathcal{N}(\theta, 4)$ unter $\mathbb{P}_\theta$ folgt, dass X_1 stetig ist mit Dichte

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{1}{8}(x_1-\theta)^2}.$$

6.F1 [3 Punkte] Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood Schätzer gegeben ist durch

$$T = T_{ML} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \,.$$

6.F2 [1 Punkt] Ist der Schätzer T_{ML} aus der vorherigen Teilaufgabe erwartungstreu?

6.F3 [2 Punkte] Berechnen Sie den mittleren quadratischen Schätzfehler $\mathrm{MSE}_\theta[T_{ML}]$ für jedes $\theta \in \mathbb{R}$.

6.F4 [2 Punkte] Zeigen Sie, dass für jedes $\theta \in \mathbb{R}$

$$\frac{\sqrt{n} \cdot (T_{ML} - \theta)}{2} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \text{unter } \mathbb{P}_\theta.$$

6.F5 [2 Punkte] Bestimmen Sie ein Konfidenzintervalll für θ mit Niveau 95%.

Hinweis: Für eine Zufallsvariable $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ gilt

$$\mathbb{P}[-1.96 \leq Z \leq 1.96] \geq 0.95.$$