Aufgaben und Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

[4 Punkte]

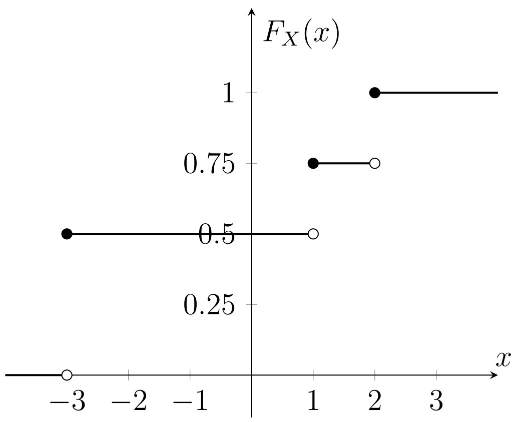
1.MC1 [1 Punkt] Sei $\Omega = \{1, 2, 3\}$. In welchem Fall ist $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Ω?

(A) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$
(B) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
(C) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$
(D) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$

Lösung:

$\boxed{\mathcal{F} = \{\emptyset, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}}$

1.MC2 [1 Punkt] Wir betrachten die folgende Verteilungsfunktion F_X einer Zufallsvariable X. Welche Aussage ist korrekt?



(A) Die Zufallsvariable X ist sowohl stetig als auch diskret.
(B) Die Zufallsvariable X ist stetig.
(C) Die Zufallsvariable X ist diskret.
(D) Die Zufallsvariable X ist weder stetig noch diskret.

Lösung:

$\boxed{\text{Die Zufallsvariable } X \text{ ist diskret.}}$

1.MC3 [1 Punkt] Seien X, Y zwei diskrete Zufallsvariable, die je Werte in $\{0, 1\}$ annehmen. Die gemeinsame Verteilung $p = (p(x, y))_{x,y\in\{0,1\}}$ von (X, Y) ist gegeben durch

$$p(0, 0) = 1/4, \qquad p(0, 1) = 0,$$
$$p(1, 0) = 1/4, \qquad p(1, 1) = 1/2.$$

Was sind die Randverteilungen von X und Y?

(A) $\mathbb{P}[X=0]=\mathbb{P}[X=1]=1/2 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[Y=0]=\mathbb{P}[Y=1]=1/2.$

(B) $\mathbb{P}[X=0]=\mathbb{P}[X=1]=1/2 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[Y=0]=1/4,\ \mathbb{P}[Y=1]=3/4.$

(C) $\mathbb{P}[X=0]=1/4,\ \mathbb{P}[X=1]=3/4 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[Y=0]=1/4,\ \mathbb{P}[Y=1]=3/4.$

(D) $\mathbb{P}[X=0]=1/4,\ \mathbb{P}[X=1]=3/4 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[Y=0]=\mathbb{P}[Y=1]=1/2.$

Lösung:

Die Randverteilungen von X_1 und X_2 sind gegeben durch

$$\mathbb{P}[X=0]=1/4,\ \mathbb{P}[X=1]=3/4 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[Y=0]=\mathbb{P}[Y=1]=1/2.$$

1.MC4 [1 Punkt] Sei $\Theta = (0, \infty)$. Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \theta \in [5, 10] \cup [20, 50]$. Welche Alternativhypothese ist möglich?

(A) $H_A : \theta \in (10, 20)$

(B) $H_A : \theta \in (-5, 5)$

(C) $H_A : \theta \in [40, \infty)$

(D) $H_A : \theta = (0, 5]$

Lösung:

Die Alternativhypothese $H_A : \theta \in (10, 20)$ ist möglich, da H_0 und H_A in diesem Fall disjunkt sind.

Aufgabe 2

[10 Punkte]

Seien X_1 und X_2 zwei unabhängige Zufallsvariablen mit

$$X_1 \sim \mathcal{U}([-1,2]) \quad \text{und} \quad X_2 \sim \mathcal{U}([0,3]).$$

Zur Erinnerung: Die Dichten von X_1 und X_2 sind gegeben durch

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{für } x \in [-1,2], \\ 0 & \text{für } x \notin [-1,2], \end{cases} \quad \text{und} \quad f_{X_2}(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{für } x \in [0,3], \\ 0 & \text{für } x \notin [0,3]. \end{cases}$$

Zusätzlich definieren wir die Zufallsvariablen

$$Y := X_1 + X_2 \quad \text{und} \quad Z := X_1 \cdot X_2.$$

2.MC1 [1 Punkt] Was ist die Verteilungsfunktion F_{X_1} von X_1?

(A)

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ \frac{1}{3} & \text{für } -1 \le x \le 2, \\ 1 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

(B)

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \frac{1}{3} & \text{für } 0 \le x < 1, \\ \frac{2}{3} & \text{für } 1 \le x < 2, \\ 1 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

(C)

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ \frac{x+1}{3} & \text{für } -1 \le x \le 2, \\ 1 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

(D)

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ \frac{x}{3} & \text{für } -1 \le x \le 2, \\ 1 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

Lösung:

Die Verteilungsfunktion F_{X_1} von X_1 ist

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ \frac{x+1}{3} & \text{für } -1 \le x \le 2, \\ 1 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

2.MC2 [1 Punkt] Was ist der Erwartungswert von X_1?

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 1

(C) $\frac{3}{2}$

(D) 0

Lösung:

Der Erwartungswert ist $\frac{1}{2}$:

$$\mathbb{E}[X_1] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X_1}(x)\, dx = \int_{-1}^{2} \frac{1}{3} x\, dx = \left[\frac{1}{6}x^2\right]_{-1}^{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

2.MC3 [2 Punkte] Was ist die Varianz von X_1?

(A) $\frac{9}{4}$
(B) 1
(C) $\frac{3}{4}$
(D) $\frac{9}{8}$

Lösung:

Die Varianz ist $\frac{3}{4}$.

Option 1:

$$\begin{aligned}\sigma_{X_1}^2 &= \mathbb{E}\left[\left(X_1 - \frac{1}{2}\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot f_{X_1}(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{2} \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \left[\frac{1}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Option 2:

$$\begin{aligned}\sigma_{X_1}^2 &= \mathbb{E}\left[(X_1)^2\right] - \mathbb{E}[X_1]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_{X_1}(x)\,dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \int_{-1}^{2} \frac{1}{3}x^2\,dx - \frac{1}{4} = \left[\frac{1}{9}x^3\right]_{-1}^{2} - \frac{1}{4} = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

2.MC4 [1 Punkt] Was ist der Erwartungswert von Y?

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3

Lösung:

Analog zur Berechnung des Erwartungswerts von X_1 erhalten wir $\mathbb{E}[X_2] = \frac{3}{2}$. Die Linearität des Erwartungswerts impliziert

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

2.MC5 [1 Punkt] Was ist die Varianz von Y?

(A) $\frac{9}{2}$
(B) $\frac{3}{2}$

(C) 2

(D) $\frac{9}{4}$

Lösung:

Analog zur Berechnung der Varianz von X_1 erhalten wir $\sigma_{X_1}^2 = \frac{3}{4}$. Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 sind unabhängig. Somit folgt (Satz 4.25)

$$\sigma_Y^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}.$$

2.MC6 [1 Punkt] Was ist der Erwartungswert von Z?

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) 2

(D) $\frac{3}{2}$

Lösung:

Aus der Unabhängigkeit von X_1 und X_2 folgt

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}\left[X_1 \cdot X_2\right] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

2.MC7 [1 Punkt] Welches Ereignis tritt fast sicher ein?

(A) $X_1 \leq X_2$

(B) $X_2 \leq Y$

(C) $0 \leq Y$

(D) $X_1 \leq Y$

Lösung:

Da $X_2 \geq 0$ fast sicher eintritt, folgt auch dass $Y = X_1 + X_2 \geq X_1$ fast sicher eintritt. Die anderen Ereignisse treten je mit positiver Wahrscheinlichkeit nicht ein.

2.MC8 [2 Punkte] Welche Ungleichung ist **nicht** korrekt?

(A) $\mathbb{E}\left[Y^4\right] \geq 16$

(B) $\mathbb{E}\left[Y^2\right] \geq 8$

(C) $\mathbb{E}\left[Y^2\right] \geq 4$

(D) $\mathbb{E}\left[|Y|\right] \geq 2$

Lösung:

Da die Funktion $\phi(x) = |x|$ konvex ist, folgt aus Jensen's Ungleichung:

$$\mathbb{E}\left[|Y|\right] \geq |\mathbb{E}[Y]| = 2.$$

Da die Funktion $\phi(x) = x^2$ ebenfalls konvex ist, folgt aus Jensen's Ungleichung ebenfalls:

$$\mathbb{E}\left[Y^2\right] \geq \left(\mathbb{E}[|Y|]\right)^2 \geq 2^2 = 4,$$
$$\mathbb{E}\left[Y^4\right] \geq \left(\mathbb{E}[Y^2]\right)^2 \geq 4^2 = 16.$$

Aus Satz 4.25 folgt

$$\mathbb{E}\left[Y^2\right] = \sigma_Y^2 + \left(\mathbb{E}[Y]\right)^2 = 3/2 + 2^2 = 11/2 < 8.$$

Aufgabe 3

[6 Punkte]

3.MC1 [2 Punkte] Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Seien $A, B, C \in \mathcal{F}$ drei Ereignisse. Welche Aussage ist **nicht** korrekt?

(A) $\mathbb{P}[A \cup (B \cap C)] \leq \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$

(B) $\mathbb{P}[A \cup B] + \mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$

(C) $\mathbb{P}[A \cup B \cup C] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C] - \mathbb{P}[A \cap B] - \mathbb{P}[A \cap C] - \mathbb{P}[B \cap C]$

(D) $\mathbb{P}[A \cup (B \cap A)] = \mathbb{P}[A]$

Lösung:

Die Aussage $\mathbb{P}[A \cup B \cup C] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C] - \mathbb{P}[A \cap B] - \mathbb{P}[A \cap C] - \mathbb{P}[B \cap C]$ ist nicht korrekt. Beispielsweise erhalten wir für $A = B = C = \Omega$, dass $\mathbb{P}[A \cup B \cup C] = 1$, aber $\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C] - \mathbb{P}[A \cap B] - \mathbb{P}[A \cap C] - \mathbb{P}[B \cap C] = 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0$.

3.MC2 [2 Punkte] Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 + 8xy + 4y^2, & (x,y) \in [0, \frac{1}{3}] \times [0,1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Was sind die Dichten f_X und f_Y der Randverteilungen von X und Y?

(A) $f_X(x) = (7/3 + 4x) \cdot \mathbb{1}_{x \in [0,1/3]}$ und $f_Y(y) = (1/3 + 4/9y + 4/3y^2) \cdot \mathbb{1}_{y \in [0,1]}$

(B) $f_X(x) = (3 + 4x) \cdot \mathbb{1}_{x \in [0,1/3]}$ und $f_Y(y) = (1/3 + 4/9y + 4/3y^2) \cdot \mathbb{1}_{y \in [0,1]}$

(C) $f_X(x) = (3 + 4x) \cdot \mathbb{1}_{x \in [0,1/3]}$ und $f_Y(y) = (1/3 + 4/3(y + y^2)) \cdot \mathbb{1}_{y \in [0,1]}$

(D) $f_X(x) = (7/3 + 4x) \cdot \mathbb{1}_{x \in [0,1/3]}$ und $f_Y(y) = (1/3 + 4/3(y + y^2)) \cdot \mathbb{1}_{y \in [0,1]}$

Lösung:

Wir berechnen

$$f_X(x) = \mathbb{1}_{x \in [0,1/3]} \cdot \int_0^1 1 + 8xy + 4y^2 \; dy = \mathbb{1}_{x \in [0,1/3]} \cdot \left[y + 4xy^2 + \frac{4}{3}y^3 \right]_0^1 = (\frac{7}{3} + 4x) \cdot \mathbb{1}_{x \in [0,1/3]}$$
$$f_Y(y) = \mathbb{1}_{y \in [0,1]} \cdot \int_0^{1/3} 1 + 8xy + 4y^2 \; dx = \mathbb{1}_{y \in [0,1]} \cdot \left[x + 4x^2y + 4xy^2 \right]_0^{1/3} = (\frac{1}{3} + \frac{4}{9}y + \frac{4}{3}y^2) \cdot \mathbb{1}_{y \in [0,1]}$$

3.MC3 [2 Punkte] Sei $\Theta = [0,1]$. Seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen. Wir betrachten die Modellfamilie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$, sodass $X_1, \ldots, X_n$ unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig, identisch verteilt sind mit $X_i \sim \text{Bin}(2, \theta)$, und den Schätzer

$$T = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Für $\theta \in [0,1]$, was ist der mittlere quadratische Schätzfehler $\text{MSE}_\theta[T]$?

(A) $\frac{\theta(1-\theta)}{2n}$

(B) $\frac{\theta(1-\theta)}{2n} + \theta^2$

(C) $\frac{\theta^2}{2n} + \theta^2$

(D) $\frac{\theta^2}{2n}$

Lösung:

Wir berechnen

$$\mathbb{E}_\theta[T] = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_\theta[X_1] = \theta.$$
$$\mathrm{Var}_\theta[T] = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}_\theta[X_1] = \frac{\theta(1-\theta)}{2n}.$$

Somit folgt

$$\mathrm{MSE}_\theta[T] = \frac{\theta(1-\theta)}{2n} + (\theta-\theta)^2 = \frac{\theta(1-\theta)}{2n}.$$

Aufgabe 4

[10 Punkte]

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ gegeben durch

$$f_X(x) = \begin{cases} 4 \cdot x^{-5} & \text{für } x \geq 1, \\ 0 & \text{für } x < 1. \end{cases}$$

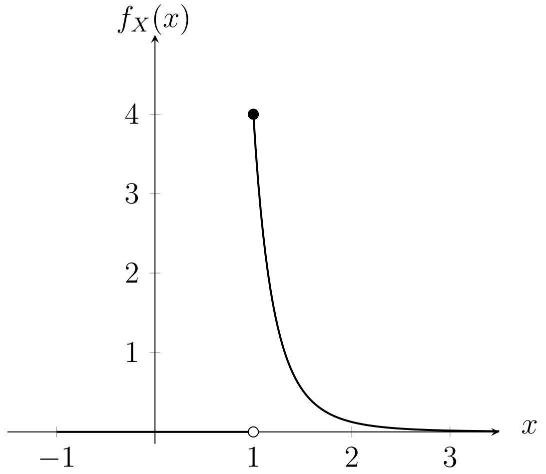
4.A1 [2 Punkte] Überprüfen Sie, dass f_X eine Dichtefunktion ist und skizzieren Sie f_X.

Lösung:

Wir berechnen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_1^{\infty} 4x^{-5}dx = \left[-x^{-4}\right]_1^{\infty} = 1.$$

Somit folgt, dass f_X in der Tat eine Dichtefunktion ist. Wir skizzieren:



4.A2 [2 Punkte] Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_X von X.

Lösung:

Sei $a \in \mathbb{R}$. Für $a < 1$ gilt $F_X(a) = \mathbb{P}[X \leq a] = 0$.

Für $a \geq 1$ berechnen wir

$$F_X(a) = \mathbb{P}[X \leq a] = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx = \int_1^a 4x^{-5}dx = \left[-x^{-4}\right]_1^a = -a^{-4} + 1.$$

Somit erhalten wir

$$F_X(a) = \begin{cases} 1 - a^{-4} & \text{für } a \geq 1, \\ 0 & \text{für } x < 1. \end{cases}$$

4.A3 [2 Punkte] Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}[|X| \leq 1/2] \quad \text{and} \quad \mathbb{P}[X \geq 2]$$

Lösung:

Da die Dichte von X im Intervall $[-1/2, 1/2]$ gleich null ist, erhalten wir

$$\mathbb{P}[|X| \leq 1/2] = 0.$$

Wir berechnen nun

$$\mathbb{P}[X \geq 2] = 1 - \mathbb{P}[X < 2] = 1 - \mathbb{P}[X \leq 2] = 1 - F_X(2) = 2^{-4} = 1/16,$$

wobei wir im zweiten Schritt verwendet haben, dass X eine stetige Zufallsvariable ist.

Wir betrachten nun die Zufallsvariable $Y := 2 \cdot X^2$.

4.A4 [2 Punkte] Berechnen Sie den Erwartungswert von Y.

Lösung:

Wir verwenden Theorem 4.9 und erhalten

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[2X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} 2x^2 \cdot f_X(x) dx \\ &= \int_1^{\infty} 8x^{-3} = \left[-4x^{-2}\right]_1^{\infty} = 4.\end{aligned}$$

4.A5 [2 Punkte] Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_Y von Y.

Lösung:

Aus Aufgabenteil 2 wissen wir bereits, dass für $a < 1$ gilt $F_X(a) = \mathbb{P}[X \leq a] = 0$ und für $a \geq 1$ gilt

$$F_X(a) = \mathbb{P}[X \leq a] = -a^{-4} + 1.$$

Zunächst stellen wir fest, dass Y nur nicht-negative Werte annimmt. Es gilt also $\mathbb{P}[Y < 0] = 0$. Weiterhin erhalten wir für $0 \leq b < 2$,

$$F_Y(b) = \mathbb{P}[Y \leq b] = \mathbb{P}[2X^2 \leq b] = \mathbb{P}[-\sqrt{b/2} \leq X \leq \sqrt{b/2}] = 0,$$

und für $b \geq 2$,

$$F_Y(b) = \mathbb{P}[-\sqrt{b/2} \leq X \leq \sqrt{b/2}] = \mathbb{P}[X \leq \sqrt{b/2}] = 1 - (\sqrt{b/2})^{-4} = 1 - (2/b)^2,$$

wobei wir verwendet haben, dass X nur nicht-negative Werte annimmt. Es folgt also

$$F_Y(b) = \begin{cases} 1 - (2/b)^2 & \text{für } b \geq 2, \\ 0 & \text{für } b < 2. \end{cases}$$

Aufgabe 5

[10 Punkte]

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine unendliche Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen, wobei X_1 diskret ist mit

$$\mathbb{P}[X_1 = -1] = \mathbb{P}[X_1 = 0] = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[X_1 = 1] = \frac{1}{2}.$$

5.A1 [2 Punkte] Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{4}$$

und bestimmen Sie die Varianz $\sigma^2_{X_1}$ von X_1.

Lösung:

$$\mathbb{E}[X_1] = (-1) \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Option 1:

$$\sigma^2_{X_1} = \left(-1 - \frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{64} + \frac{1}{64} + \frac{18}{64} = \frac{11}{16}$$

Option 2:

$$\sigma^2_{X_1} = \mathbb{E}[{X_1}^2] - \mathbb{E}[X_1]^2 = (-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + (1)^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ betrachten wir die Partialsumme

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n.$$

5.A2 [2 Punkte] Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von S_n.

Lösung:

Aufgrund der Linearität des Erwartungswerts (Theorem 4.10) und der identische Verteilung der $X_1, \ldots, X_n$ erhalten wir

$$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_n] = \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4} = \frac{n}{4}.$$

Mit Satz 4.25 erhalten wir aufgrund der Unabhängigkeit und der identischen Verteilung der $X_1, \ldots, X_n$

$$\sigma^2_{S_n} = \sigma^2_{X_1} + \ldots + \sigma^2_{X_n} = \frac{11}{16} + \ldots + \frac{11}{16} = \frac{11n}{16}.$$

5.A3 [3 Punkte] Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\Big[S_n \geq n/2\Big] \leq \mathbb{P}\Big[|S_n - n/4| \geq n/4\Big].$$

Schlussfolgern Sie, dass

$$\mathbb{P}[S_n \geq n/2] \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Lösung:

Wir stellen fest, dass

$$\Big\{S_n - n/4 \geq n/4\Big\} \subset \Big\{|S_n - n/4| \geq n/4\Big\}.$$

Somit folgt aus der Monotonie (Satz 1.8), dass

$$\mathbb{P}\Big[S_n \geq n/2\Big] = \mathbb{P}\Big[S_n - n/4 \geq n/4\Big] \leq \mathbb{P}\Big[|S_n - n/4| \geq n/4\Big].$$

Option 1:

Da $\mathbb{E}[S_n] = n/4$ aus Teilaufgabe 5.A2, können wir nun die Tschebyscheffsche Ungleichung (Satz 4.24) mit $a = n/4$ verwenden und erhalten

$$\mathbb{P}\Big[|S_n - n/4| \geq n/4\Big] = \mathbb{P}\Big[|S_n - \mathbb{E}[S_n]| \geq n/4\Big] \leq \frac{\frac{11n}{16}}{\left(\frac{n}{4}\right)^2} = \frac{11}{n} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Option 2:

Da $\mathbb{E}[S_n/n] = 1/4$ aus Teilaufgabe 5.A2, folgt aus dem Gesetz der grossen Zahlen , dass fast sicher für alle $\epsilon > 0$, ein n_0 existiert sodass für alle $n \geq n_0$

$$|S_n/n - 1/4| < \epsilon \iff |S_n - n/4| < \epsilon n.$$

Insbesondere gilt für $\epsilon = 1/4$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[|S_n - n/4| \geq n/4] = 0.$$

5.A4 [1 Punkt] Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} S_n/n = 1/4\right].$$

Lösung:

Da $\mathbb{E}[X_1] = 1/4$ folgt aus dem Gesetz der grossen Zahlen (GGZ, Theorem 6.1), dass das Ereignis

$$\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{4}\right\}$$

fast sicher eintritt. Es gilt also $\mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} S_n/n = 1/4\right] = 1$.

5.A5 [2 Punkte] Zeigen Sie, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein gross genuges $A \in \mathbb{R}$ existiert, sodass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[S_n \geq n/4 + A \cdot \sqrt{\sigma_{X_1}^2\, n}\right] \leq \epsilon.$$

Lösung:

Mit dem Zentralen Grenzwertsatz erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[S_n \geq n/4 + A \cdot \sqrt{\sigma_{X_1}^2\, n}\right] = 1 - \Phi(A),$$

wobei $\Phi(\cdot)$ die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ ist. Da für eine Verteilungsfunktion gilt, dass

$$\lim_{A\to+\infty} \Phi(A) = 1,$$

können wir A gross genug wählen, sodass $1 - \Phi(A) \leq \epsilon$.

Aufgabe 6

[10 Punkte]

Sei $\Theta = \mathbb{R}$ und seien $X_1, \ldots, X_8$ unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig und identisch verteilt mit $X_1 = \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$, wobei $\sigma^2 = 1/2$. Die Dichte von X_1 ist also gegeben durch

$$f_{X_1}(x_1; \theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-(x_1 - \theta)^2\right).$$

Wir betrachten nun die Nullhypothese $H_0 : \theta = 0$, d.h. $\Theta_0 = \{0\}$, und die Alternativhypothese $H_A : \theta = 1$, d.h. $\Theta_A = \{1\}$.

6.A1 [3 Punkte] Zeigen Sie, dass der Likelihood-Quotient für $x_1, \ldots, x_8 \in \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$R(x_1, \ldots, x_8) = \exp\left(2 \cdot \sum_{i=1}^{8} x_i\right) \cdot \exp(-8).$$

Hinweis: Wir erinnern daran, dass der Likelihood-Quotient im Allgemeinen definiert ist als

$$R(x_1, \ldots, x_n) := \frac{L(x_1, \ldots, x_n; \theta_A)}{L(x_1, \ldots, x_n; \theta_0)},$$

wobei $L(x_1, \ldots, x_n; \theta)$ die Likelihood-Funktion ist.

Lösung:

Da die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_8$ unabhängig sind, sind sie nach Theorem 5.11 gemeinsam/insgesamt stetig mit gemeinsamer Dichte

$$f_{\overrightarrow{X}}(x_1, \ldots, x_8; \theta) = f_{X_1}(x_1; \theta) \cdot \ldots \cdot f_{X_8}(x_8; \theta) = \frac{1}{\pi^4} \exp\left(-\sum_{i=1}^{8} (x_i - \theta)^2\right)$$

unter $\mathbb{P}_\theta$ (Begründung notwendig!). Der Likelihood-Quotient ist also

$$R(x_1, \ldots, x_8) = \frac{L(x_1, \ldots, x_8; 1)}{L(x_1, \ldots, x_8; 0)} = \frac{f_{\overrightarrow{X}}(x_1, \ldots, x_8; 1)}{f_{\overrightarrow{X}}(x_1, \ldots, x_8; 0)}.$$

Durch Einsetzen und Umformen erhalten wir

$$\begin{aligned} R(x_1, \ldots, x_8) &= \frac{\frac{1}{\pi^4} \exp\left(-\sum_{i=1}^{8} (x_i - 1)^2\right)}{\frac{1}{\pi^4} \exp\left(-\sum_{i=1}^{8} (x_i - 0)^2\right)} \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^{8} (x_i^2) - (x_i^2 - 2x_i + 1)\right) = \exp\left(2 \cdot \sum_{i=1}^{8} x_i\right) \cdot \exp(-8). \end{aligned}$$

Wir verwenden die Teststatistik

$$T = \sum_{i=1}^{8} X_i.$$

Diese (einfachere) Wahl bietet sich an, da $\sum_{i=1}^{8} x_i$ genau dann gross ist, wenn $R(x_1, \ldots, x_8)$ gross ist.

6.A2 [1 Punkt] Bestimmen Sie die Verteilung von T unter $\mathbb{P}_\theta$.

Lösung:

Da die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_8$ unabhängig und identisch verteilt sind mit $X_1 \sim \mathcal{N}(\theta, 1/2)$, gilt aufgrund der Eigenschaften der Normalverteilung (siehe Kapitel 3.6), dass die Summe $T = \sum_{i=1}^{8} X_i$ normalverteilt ist mit Parametern $m = 8 \cdot \theta$ und $\sigma^2 = 8 \cdot 1/2 = 4$. Also gilt

$$T \sim \mathcal{N}(8\theta, 4).$$

Als Verwerfungsbereich wählen wir

$$K = (3.3, \infty].$$

6.A3 [1 Punkt] Entscheiden Sie basierend auf den folgenden 8 Beobachtungen, ob die Nullhypothese angenommen oder verworfen wird.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
1.2	-0.7	0.3	2.5	-0.1	1.7	1.3	-0.2

Lösung:

Wir berechnen die Teststatistik

$$T(\omega) = \sum_{i=1}^{8} X_i(\omega) = \sum_{i=1}^{8} x_i = 6.$$

Da $T(\omega) \in K$, wird die Nullhypothese verworfen.

6.A4 [2 Punkte] Zeigen Sie, dass der Test (T, K) Signifikanzniveau 5% hat.
Hinweis: Verwenden Sie die Werte der Standardnormalverteilung auf der nachfolgenden Seite.

Lösung:

Hierzu müssen wir zeigen, dass

$$\mathbb{P}_0 \left[T \in (3.3, \infty]\right] = \mathbb{P}_0 \left[T > 3.3\right] \leq 0.05.$$

Aus Teilaufgabe 6.A2 wissen wir, dass T $\mathcal{N}(0, 4)$-verteilt ist unter $\mathbb{P}_0$. Durch Standardisieren erhalten wir, dass $T/\sqrt{4} = T/2$ $\mathcal{N}(0, 1)$-verteilt ist unter $\mathbb{P}_0$. Also gilt

$$\mathbb{P}_0 \left[T > 3.3\right] = \mathbb{P}_0 \left[T/2 > 1.65\right] = \mathbb{P}[Z > 1.65] \leq 0.05,$$

wobei wir den Hinweis verwendet haben.

6.A5 [2 Punkte] Zeigen Sie, dass der Test (T, K) eine Macht von mindestens 99% hat.
Hinweis: Verwenden Sie die Werte der Standardnormalverteilung auf der nachfolgenden Seite.

Lösung:

Da die Alternativhypothese einfach ist, müssen wir nur

$$\mathbb{P}_1\left[T \in (3.3, \infty]\right] = \mathbb{P}_1[T > 3.3]$$

berechnen. Aus Teilaufgabe 6.A2 wissen wir, dass T $\mathcal{N}(8,4)$-verteilt ist unter $\mathbb{P}_1$. Durch Standardisieren erhalten wir, dass $(T-8)/\sqrt{4} = (T-8)/2$ $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt ist unter $\mathbb{P}_1$. Also gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_1\left[T > 3.3\right] &= \mathbb{P}_1\left[(T-8)/2 > -2.35\right] = \mathbb{P}[Z > -2.35] = \mathbb{P}[Z < 2.35] \\ &= 1 - \mathbb{P}[Z > 2.35] \geq 1 - 0.01 = 0.99,\end{aligned}$$

wobei wir den Hinweis verwendet haben. Die Macht des Tests ist also grösser als 99%.

6.A6 [1 Punkt] Begründen Sie, dass jeder andere Test (T', K') eine grössere Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art oder 2. Art hat.

Lösung:

Sei nun (T', K') ein anderer Test. Falls $\mathbb{P}_0[T' \in K'] > \mathbb{P}_0[T \in K]$, so ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art bei (T', K') grösser. Andererseits gilt für den Fall $\mathbb{P}_0[T' \in K'] \leq \mathbb{P}_0[T \in K]$ mit dem Neyman-Pearson-Lemma, dass die Macht von (T', K') kleiner ist als die von (T, K). Somit hat (T', K') eine grössere Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art.

z	0.0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
$\Phi(z)$	0.500	0.520	0.540	0.560	0.579	0.599	0.618	0.637	0.655	0.674

z	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95
$\Phi(z)$	0.691	0.709	0.726	0.742	0.758	0.773	0.788	0.802	0.816	0.829

z	1.0	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3	1.35	1.4	1.45
$\Phi(z)$	0.841	0.853	0.864	0.875	0.885	0.894	0.903	0.911	0.919	0.926

z	1.5	1.55	1.6	1.65	1.7	1.75	1.8	1.85	1.9	1.95
$\Phi(z)$	0.933	0.939	0.945	0.951	0.955	0.960	0.964	0.968	0.971	0.974

z	2.0	2.05	2.1	2.15	2.2	2.25	2.3	2.35	2.4	2.45
$\Phi(z)$	0.977	0.980	0.982	0.984	0.986	0.988	0.989	0.991	0.992	0.993

Werte der Verteilungsfunktion $\Phi(z) = \mathbb{P}[Z \leq z]$ der Standardnormalverteilung $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.