D–INFK

# Prüfung Wahrscheinlichkeit und Statistik

401-0614-00L

| *Nachname* | *Vorname* | *Legi-Nr.* |
|---|---|---|
| **XX** | **XX** | **XX-000-000** |
| | | *Prüfungs-Nr.* |
| | | ***000*** |

*Bitte noch nicht umblättern!*

*Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.*

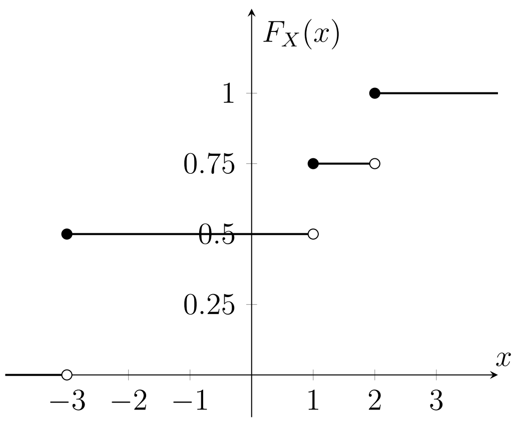
# Aufgabe 1

**[4 Punkte]**

**1.MC1 [1 Punkt]** Sei $\Omega = \{1, 2, 3\}$. In welchem Fall ist $\mathcal{F}$ eine $\sigma$-Algebra auf $\Omega$?

(A) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$
(B) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
(C) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$
(D) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$

**1.MC2 [1 Punkt]** Wir betrachten die folgende Verteilungsfunktion $F_X$ einer Zufallsvariable $X$. Welche Aussage ist korrekt?




(A) Die Zufallsvariable $X$ ist sowohl stetig als auch diskret.
(B) Die Zufallsvariable $X$ ist stetig.
(C) Die Zufallsvariable $X$ ist diskret.
(D) Die Zufallsvariable $X$ ist weder stetig noch diskret.

**1.MC3 [1 Punkt]** Seien $X, Y$ zwei diskrete Zufallsvariable, die je Werte in $\{0, 1\}$ annehmen. Die gemeinsame Verteilung $p = (p(x, y))_{x,y\in\{0,1\}}$ von $(X, Y)$ ist gegeben durch

$$p(0,0) = 1/4, \qquad p(0,1) = 0,$$
$$p(1,0) = 1/4, \qquad p(1,1) = 1/2.$$

Was sind die Randverteilungen von $X$ und $Y$?

(A) $\mathbb{P}[X = 0] = \mathbb{P}[X = 1] = 1/2$ und $\mathbb{P}[Y = 0] = \mathbb{P}[Y = 1] = 1/2$.
(B) $\mathbb{P}[X = 0] = \mathbb{P}[X = 1] = 1/2$ und $\mathbb{P}[Y = 0] = 1/4,\ \mathbb{P}[Y = 1] = 3/4$.
(C) $\mathbb{P}[X = 0] = 1/4,\ \mathbb{P}[X = 1] = 3/4$ und $\mathbb{P}[Y = 0] = 1/4,\ \mathbb{P}[Y = 1] = 3/4$.
(D) $\mathbb{P}[X = 0] = 1/4,\ \mathbb{P}[X = 1] = 3/4$ und $\mathbb{P}[Y = 0] = \mathbb{P}[Y = 1] = 1/2$.

**1.MC4 [1 Punkt]** Sei $\Theta = (0, \infty)$. Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \theta \in [5, 10] \cup [20, 50]$. Welche Alternativhypothese ist möglich?

(A) $H_A : \theta \in (10, 20)$

(B) $H_A : \theta \in (-5, 5)$

(C) $H_A : \theta \in [40, \infty)$

(D) $H_A : \theta = (0, 5]$

# Aufgabe 2

**[10 Punkte]**

Seien $X_1$ und $X_2$ zwei unabhängige Zufallsvariablen mit

$$X_1 \sim \mathcal{U}([-1,2]) \quad \text{und} \quad X_2 \sim \mathcal{U}([0,3]).$$

Zur Erinnerung: Die Dichten von $X_1$ und $X_2$ sind gegeben durch

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{für } x \in [-1,2], \\ 0 & \text{für } x \notin [-1,2], \end{cases} \quad \text{und} \quad f_{X_2}(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{für } x \in [0,3], \\ 0 & \text{für } x \notin [0,3]. \end{cases}$$

Zusätzlich definieren wir die Zufallsvariablen

$$Y := X_1 + X_2 \quad \text{und} \quad Z := X_1 \cdot X_2.$$

**2.MC1 [1 Punkt]** Was ist die Verteilungsfunktion $F_{X_1}$ von $X_1$?

(A)

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ \frac{1}{3} & \text{für } -1 \leq x \leq 2, \\ 1 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

(B)

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \frac{1}{3} & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ \frac{2}{3} & \text{für } 1 \leq x < 2, \\ 1 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

(C)

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ \frac{x+1}{3} & \text{für } -1 \leq x \leq 2, \\ 1 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

(D)

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ \frac{x}{3} & \text{für } -1 \leq x \leq 2, \\ 1 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

**2.MC2 [1 Punkt]** Was ist der Erwartungswert von $X_1$?

(A) $\frac{1}{2}$
(B) 1
(C) $\frac{3}{2}$
(D) 0

**2.MC3 [2 Punkte]** Was ist die Varianz von $X_1$?

(A) $\frac{9}{4}$
(B) 1
(C) $\frac{3}{4}$
(D) $\frac{9}{8}$

**2.MC4 [1 Punkt]** Was ist der Erwartungswert von $Y$?

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3

**2.MC5 [1 Punkt]** Was ist die Varianz von $Y$?

(A) $\frac{9}{2}$
(B) $\frac{3}{2}$
(C) 2
(D) $\frac{9}{4}$

**2.MC6 [1 Punkt]** Was ist der Erwartungswert von $Z$?

(A) $\frac{3}{4}$
(B) $\frac{1}{4}$
(C) 2
(D) $\frac{3}{2}$

**2.MC7 [1 Punkt]** Welches Ereignis tritt fast sicher ein?

(A) $X_1 \leq X_2$
(B) $X_2 \leq Y$
(C) $0 \leq Y$
(D) $X_1 \leq Y$

**2.MC8 [2 Punkte]** Welche Ungleichung ist **nicht** korrekt?

(A) $\mathbb{E}[Y^4] \geq 16$
(B) $\mathbb{E}[Y^2] \geq 8$
(C) $\mathbb{E}[Y^2] \geq 4$
(D) $\mathbb{E}[|Y|] \geq 2$

# Aufgabe 3

**[6 Punkte]**

**3.MC1 [2 Punkte]** Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Seien $A, B, C \in \mathcal{F}$ drei Ereignisse. Welche Aussage ist **nicht** korrekt?

(A) $\mathbb{P}[A \cup (B \cap C)] \leq \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$

(B) $\mathbb{P}[A \cup B] + \mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$

(C) $\mathbb{P}[A \cup B \cup C] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C] - \mathbb{P}[A \cap B] - \mathbb{P}[A \cap C] - \mathbb{P}[B \cap C]$

(D) $\mathbb{P}[A \cup (B \cap A)] = \mathbb{P}[A]$

**3.MC2 [2 Punkte]** Seien $X$ und $Y$ zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 + 8xy + 4y^2, & (x,y) \in [0, \frac{1}{3}] \times [0,1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Was sind die Dichten $f_X$ und $f_Y$ der Randverteilungen von $X$ und $Y$?

(A) $f_X(x) = (7/3 + 4x) \cdot \mathbb{1}_{x \in [0,1/3]}$ und $f_Y(y) = (1/3 + 4/9y + 4/3y^2) \cdot \mathbb{1}_{y \in [0,1]}$

(B) $f_X(x) = (3 + 4x) \cdot \mathbb{1}_{x \in [0,1/3]}$ und $f_Y(y) = (1/3 + 4/9y + 4/3y^2) \cdot \mathbb{1}_{y \in [0,1]}$

(C) $f_X(x) = (3 + 4x) \cdot \mathbb{1}_{x \in [0,1/3]}$ und $f_Y(y) = (1/3 + 4/3(y + y^2)) \cdot \mathbb{1}_{y \in [0,1]}$

(D) $f_X(x) = (7/3 + 4x) \cdot \mathbb{1}_{x \in [0,1/3]}$ und $f_Y(y) = (1/3 + 4/3(y + y^2)) \cdot \mathbb{1}_{y \in [0,1]}$

**3.MC3 [2 Punkte]** Sei $\Theta = [0,1]$. Seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen. Wir betrachten die Modellfamilie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$, sodass $X_1, \ldots, X_n$ unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig, identisch verteilt sind mit $X_i \sim \mathrm{Bin}(2, \theta)$, und den Schätzer

$$T = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Für $\theta \in [0,1]$, was ist der mittlere quadratische Schätzfehler $\mathrm{MSE}_\theta[T]$?

(A) $\frac{\theta(1-\theta)}{2n}$

(B) $\frac{\theta(1-\theta)}{2n} + \theta^2$

(C) $\frac{\theta^2}{2n} + \theta^2$

(D) $\frac{\theta^2}{2n}$

# Aufgabe 4

**[10 Punkte]**

Sei $X$ eine stetige Zufallsvariable mit Dichte $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ gegeben durch

$$f_X(x) = \begin{cases} 4 \cdot x^{-5} & \text{für } x \geq 1, \\ 0 & \text{für } x < 1. \end{cases}$$

**4.A1 [2 Punkte]** Überprüfen Sie, dass $f_X$ eine Dichtefunktion ist und skizzieren Sie $f_X$.

**4.A2 [2 Punkte]** Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_X$ von $X$.

**4.A3 [2 Punkte]** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}[|X| \leq 1/2] \quad \text{and} \quad \mathbb{P}[X \geq 2]$$

Wir betrachten nun die Zufallsvariable $Y := 2 \cdot X^2$.

**4.A4 [2 Punkte]** Berechnen Sie den Erwartungswert von $Y$.

**4.A5 [2 Punkte]** Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_Y$ von $Y$.

# Aufgabe 5

**[10 Punkte]**

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine unendliche Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen, wobei $X_1$ diskret ist mit

$$\mathbb{P}[X_1 = -1] = \mathbb{P}[X_1 = 0] = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[X_1 = 1] = \frac{1}{2}.$$

**5.A1 [2 Punkte]** Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{4}$$

und bestimmen Sie die Varianz $\sigma^2_{X_1}$ von $X_1$.

Für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ betrachten wir die Partialsumme

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n.$$

**5.A2 [2 Punkte]** Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $S_n$.

**5.A3 [3 Punkte]** Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\Big[S_n \geq n/2\Big] \leq \mathbb{P}\Big[|S_n - n/4| \geq n/4\Big].$$

Schlussfolgern Sie, dass

$$\mathbb{P}[S_n \geq n/2] \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

**5.A4 [1 Punkt]** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} S_n/n = 1/4\right].$$

**5.A5 [2 Punkte]** Zeigen Sie, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein gross genuges $A \in \mathbb{R}$ existiert, sodass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[S_n \geq n/4 + A \cdot \sqrt{\sigma^2_{X_1}\, n}\right] \leq \epsilon.$$

# Aufgabe 6

**[10 Punkte]**

Sei $\Theta = \mathbb{R}$ und seien $X_1, \dots, X_8$ unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig und identisch verteilt mit $X_1 = \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$, wobei $\sigma^2 = 1/2$. Die Dichte von $X_1$ ist also gegeben durch

$$f_{X_1}(x_1; \theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-(x_1 - \theta)^2\right).$$

Wir betrachten nun die Nullhypothese $H_0 : \theta = 0$, d.h. $\Theta_0 = \{0\}$, und die Alternativhypothese $H_A : \theta = 1$, d.h. $\Theta_A = \{1\}$.

**6.A1 [3 Punkte]** Zeigen Sie, dass der Likelihood-Quotient für $x_1, \dots, x_8 \in \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$R(x_1, \dots, x_8) = \exp\left(2 \cdot \sum_{i=1}^{8} x_i\right) \cdot \exp(-8).$$

*Hinweis: Wir erinnern daran, dass der Likelihood-Quotient im Allgemeinen definiert ist als*

$$R(x_1, \dots, x_n) := \frac{L(x_1, \dots, x_n; \theta_A)}{L(x_1, \dots, x_n; \theta_0)},$$

*wobei $L(x_1, \dots, x_n; \theta)$ die Likelihood-Funktion ist.*

Wir verwenden die Teststatistik

$$T = \sum_{i=1}^{8} X_i.$$

Diese (einfachere) Wahl bietet sich an, da $\sum_{i=1}^{8} x_i$ genau dann gross ist, wenn $R(x_1, \dots, x_8)$ gross ist.

**6.A2 [1 Punkt]** Bestimmen Sie die Verteilung von $T$ unter $\mathbb{P}_\theta$.

Als Verwerfungsbereich wählen wir

$$K = (3.3, \infty].$$

**6.A3 [1 Punkt]** Entscheiden Sie basierend auf den folgenden 8 Beobachtungen, ob die Nullhypothese angenommen oder verworfen wird.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.2 | −0.7 | 0.3 | 2.5 | −0.1 | 1.7 | 1.3 | −0.2 |

**6.A4 [2 Punkte]** Zeigen Sie, dass der Test $(T, K)$ Signifikanzniveau 5% hat.
*Hinweis: Verwenden Sie die Werte der Standardnormalverteilung auf der nachfolgenden Seite.*

**6.A5 [2 Punkte]** Zeigen Sie, dass der Test $(T, K)$ eine Macht von mindestens 99% hat.
*Hinweis: Verwenden Sie die Werte der Standardnormalverteilung auf der nachfolgenden Seite.*

**6.A6 [1 Punkt]** Begründen Sie, dass jeder andere Test $(T', K')$ eine grössere Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art oder 2. Art hat.

| $z$ | 0.0 | 0.05 | 0.1 | 0.15 | 0.2 | 0.25 | 0.3 | 0.35 | 0.4 | 0.45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Phi(z)$ | 0.500 | 0.520 | 0.540 | 0.560 | 0.579 | 0.599 | 0.618 | 0.637 | 0.655 | 0.674 |

| $z$ | 0.5 | 0.55 | 0.6 | 0.65 | 0.7 | 0.75 | 0.8 | 0.85 | 0.9 | 0.95 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Phi(z)$ | 0.691 | 0.709 | 0.726 | 0.742 | 0.758 | 0.773 | 0.788 | 0.802 | 0.816 | 0.829 |

| $z$ | 1.0 | 1.05 | 1.1 | 1.15 | 1.2 | 1.25 | 1.3 | 1.35 | 1.4 | 1.45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Phi(z)$ | 0.841 | 0.853 | 0.864 | 0.875 | 0.885 | 0.894 | 0.903 | 0.911 | 0.919 | 0.926 |

| $z$ | 1.5 | 1.55 | 1.6 | 1.65 | 1.7 | 1.75 | 1.8 | 1.85 | 1.9 | 1.95 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Phi(z)$ | 0.933 | 0.939 | 0.945 | 0.951 | 0.955 | 0.960 | 0.964 | 0.968 | 0.971 | 0.974 |

| $z$ | 2.0 | 2.05 | 2.1 | 2.15 | 2.2 | 2.25 | 2.3 | 2.35 | 2.4 | 2.45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Phi(z)$ | 0.977 | 0.980 | 0.982 | 0.984 | 0.986 | 0.988 | 0.989 | 0.991 | 0.992 | 0.993 |

Werte der Verteilungsfunktion $\Phi(z) = \mathbb{P}[Z \leq z]$ der Standardnormalverteilung $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.